مجموعات الأعداد:

- مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$: حيث: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$.
- مجموعة الأعداد الكلية (الشاملة) $\mathbb{W}$: حيث: $\mathbb{W}=\mathbb{N}\cup\{0\}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$.
- مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$: حيث: $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n,\cdots\}$.
- مجموعة الأعداد النسبية (الكسرية) $\mathbb{Q}$: حيث: $\mathbb{Q}=\left\{q: q=\frac{a}{b}\ ;\ a,b\in\mathbb{Z}\ \&\ b\neq 0\right\}$.
- مجموعة الأعداد غير النسبية (الصماء): هي مجموعة الأعداد التي لا يمكن كتابتها ككسر مثل: $\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt[3]{10}, \ln 3, \sin 9, \cdots$. تكتب كفاصلة عشرية لأرقام غير متكررة.
- مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$: هي مجموعة الأعداد الصماء مضافاً إليها $\mathbb{Q}$.
- مجموعة الأعداد العقدية (المركبة) $\mathbb{C}$: هي مجموعة الأعداد الموجودة في المستوي من الشكل: $z=x+iy$. حيث $i^2=-1$.

من الواضح أن: $\mathbb{N}\subset\mathbb{W}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

القيمة المطلقة للعدد الحقيقي:

$$|x|=\max\{x,-x\}=|x|=\begin{cases}x & \text{if} \quad x\geq 0\\ -x & \text{if} \quad x<0\end{cases}$$

$|x|=|-x|$ $|x+y|\leq|x|+|y|$

$|x-y|\geq|x|-|y|$ $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$

$|x/y|=|x|/|y|$ $|x|\leq h \ \Leftrightarrow\ -h\leq x\leq h\ ;\ (h>0)$

$$|x|\geq h\ \Leftrightarrow\ h\leq x<\infty \quad \wedge \quad -\infty<x\leq -h$$

الأعداد العقدية:

- $x_1+i\,y_1=x_2+i\,y_2 \implies x_1=x_2 \ \&\ y_1=y_2$
- $(x_1+i\,y_1)\pm(x_2+i\,y_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$
- $(x_1+i\,y_1)\cdot(x_2+i\,y_2)=x_1\,x_2-y_1y_2+i\,(x_1\,y_2+y_1\,x_2)$
- $z=x+iy \implies \bar{z}=x-iy \ \&\ z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$

أشكال العدد العقدي:

الشكل الديكارتي: $z=x+iy=Re(z)+i\,Im(z)$، الشكل النقطي: $(a,b)\ ;\ i=(0,1)$، الشكل المصفوفي: $i=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ ;\ z=\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}$، الشكل الأسي: $z=re^{i\theta}$، الشكل المثلثي أو القطبي: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$. حيث إن: $r=|z|$ و $\theta=\arctan\frac{y}{x}$.

علاقة أولر: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta=\text{cis}\,\theta$ و $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta=\text{cis}\,(-\theta)$.

$$\implies \sin\theta=\frac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{2i} \qquad \& \qquad \cos\theta=\frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{2}$$

دستور دوموافر: $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta=\text{cis}\,n\theta$.

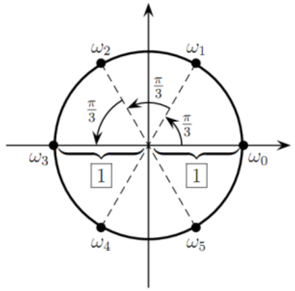
$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]=r_1\cdot r_2\,e^{i\,(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]=\frac{r_1}{r_2}\,e^{i(\theta_1-\theta_2)}\ ;\quad r_2\neq 0$$

$$\implies z^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

$$\implies \sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\,e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}\ ;k=0,1,2,\cdots,n-1$$

مثال: أوجد الجذر السادس للعدد واحد الصحيح.



الحل: إن العدد واحد يكتب $1=\cos 0+i\sin 0$، وبفرض أن الجذر هو: $\omega=R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ فيكون: $\omega^6=1$ أو:

$$R^6(\cos\varphi+i\sin\varphi)^6=\cos 0+i\sin 0$$

ومن علاقة دوموافر:

$$R^6(\cos 6\varphi+i\sin 6\varphi)=\cos 0+i\sin 0$$

ومنه $R^6=1\Rightarrow R=1 \quad \& \quad 6\varphi=0+2\pi k\ \Rightarrow\ \varphi=\frac{2\pi k}{6}$.

$k=0$ يكون $\varphi=0$ والجذر الأول: $\omega_0=(\cos 0+i\sin 0)=1$.

$k=1$ يكون $\varphi=\frac{\pi}{3}$ والجذر الثاني: $\omega_1=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

$k=2$ يكون $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ والجذر الثالث: $\omega_2=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

$k=3$ يكون $\varphi=\frac{3\pi}{3}=\pi$ والجذر الرابع: $\omega_3=(\cos\pi+i\sin\pi)=-1$.

$k=4$ يكون $\varphi=\frac{4\pi}{3}$ والجذر الخامس: $\omega_4=\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

$k=5$ يكون $\varphi=\frac{5\pi}{3}$ والجذر السادس: $\omega_5=\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

والشكل أعلاه يمثل هذه الجذور الستة.

الدوال المثلثية:

$$\sin x\ ,\cos x\ ,\tan x\ ,\cot x\ ,\sec x\ ,\csc x$$

$-1 \le \sin\theta \le +1$	$-1 \le \cos\theta \le +1$
$-\infty \le \tan\theta \le +\infty$	$-\infty \le \cot\theta \le +\infty$
$\sec\theta \ge +1$ and $\sec\theta \le -1$	$\csc\theta \ge +1$ and $\csc\theta \le -1$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ , \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}\ , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\ , \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta\ , \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta\ , \quad \cos(-\theta) = \cos\theta\ , \quad \sec(-\theta) = \sec\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta\ , \quad \cot(-\theta) = -\cot\theta\ , \quad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}\ , \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta\ , \quad \tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)\ , \quad \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

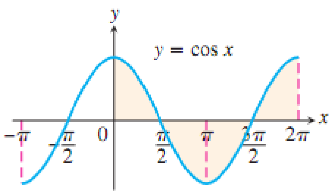
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}\ , \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\ , \quad \tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$$

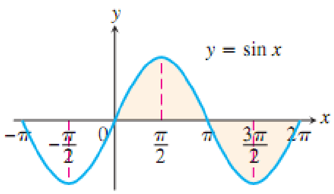
العلاقات بين الدوال المثلثية العكسية:

$\arccos\theta \equiv \text{Acos}\,\theta \equiv \cos^{-1}\theta$	$\arcsin\theta \equiv \text{Asin}\,\theta \equiv \sin^{-1}\theta$
$\text{arccot}\,\theta \equiv \text{Acot}\,\theta \equiv \cot^{-1}\theta$	$\arctan\theta \equiv \text{Atan}\,\theta \equiv \tan^{-1}\theta$
$\tan^{-1}a = \sin^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{1 + a^2}};\ -\infty < a < \infty$	$\tan^{-1}a \pm \tan^{-1}b = \tan^{-1}\dfrac{a \pm b}{1 \mp ab}$
$\sin^{-1}a = \tan^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{1 - a^2}};\ -1 < a < +1$	$a \cdot b \ne \pm 1$

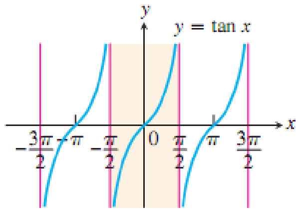
أشكال الدوال المثلثية:



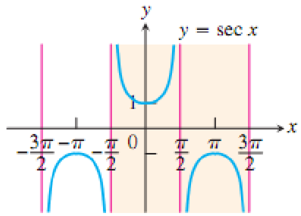
Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \le y \le 1$
Period: 2π
(a)



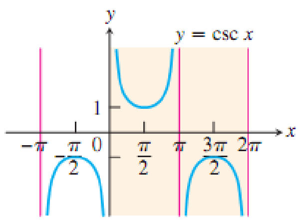
Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \le y \le 1$
Period: 2π
(b)



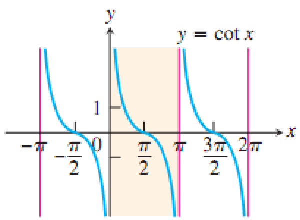
Domain: $x \ne \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Range: $-\infty < y < \infty$
Period: π
(c)



Domain: $x \ne \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Range: $y \le -1$ and $y \ge 1$
Period: 2π
(d)

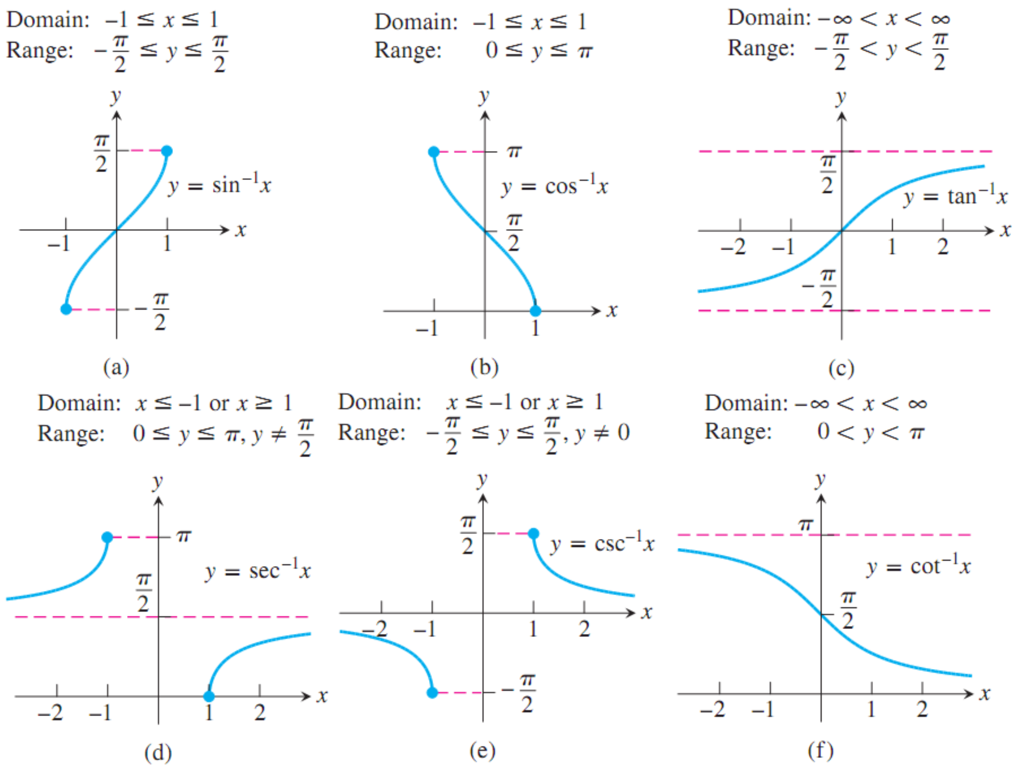


Domain: $x \ne 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Range: $y \le -1$ and $y \ge 1$
Period: 2π
(e)



Domain: $x \ne 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Range: $-\infty < y < \infty$
Period: π
(f)

أشكال الدوال المثلثية العكسية:



الدوال القطعية:

$$\sinh x = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \qquad \cosh x = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,, \qquad \coth x = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}\,, \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x\,, \qquad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,, \qquad 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x\,, \quad \cosh(-x) = \cosh x\,, \quad \operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x$$

$$\tanh(-x) = -\tanh x\,, \quad \coth(-x) = -\coth x\,, \quad \operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch} x$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x = \frac{2 \tanh x}{1 - \tanh^2 x}\,, \qquad \tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1 = \frac{1 + \tanh^2 x}{1 - \tanh^2 x}$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)\,, \qquad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

$$\sinh\alpha \cosh\beta = \frac{1}{2}[\sinh(\alpha+\beta) + \sinh(\alpha-\beta)]$$

$$\cosh\alpha \sinh\beta = \frac{1}{2}[\sinh(\alpha+\beta) - \sinh(\alpha-\beta)]$$

$$\cosh\alpha \cosh\beta = \frac{1}{2}[\cosh(\alpha+\beta) + \cosh(\alpha-\beta)]$$

$$\sinh\alpha \sinh\beta = \frac{1}{2}[\cosh(\alpha+\beta) - \cosh(\alpha-\beta)]$$

$$\sinh\alpha + \sinh\beta = 2\sinh\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sinh\alpha - \sinh\beta = 2\cosh\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sinh\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cosh\alpha + \cosh\beta = 2\cosh\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cosh\alpha - \cosh\beta = 2\sinh\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sinh\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\tanh\frac{x}{2} = t\,, \quad \sinh x = \frac{2t}{1-t^2}\,, \quad \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}\,, \quad \tanh x = \frac{2t}{1+t^2}$$

العلاقات بين الدوال القطعية العكسية واللوغاريتمات:

$$\operatorname{argcosh}\theta \equiv \operatorname{Acosh}\theta \equiv \cosh^{-1}\theta \qquad \operatorname{argsinh}\theta \equiv \operatorname{Asinh}\theta \equiv \sinh^{-1}\theta$$

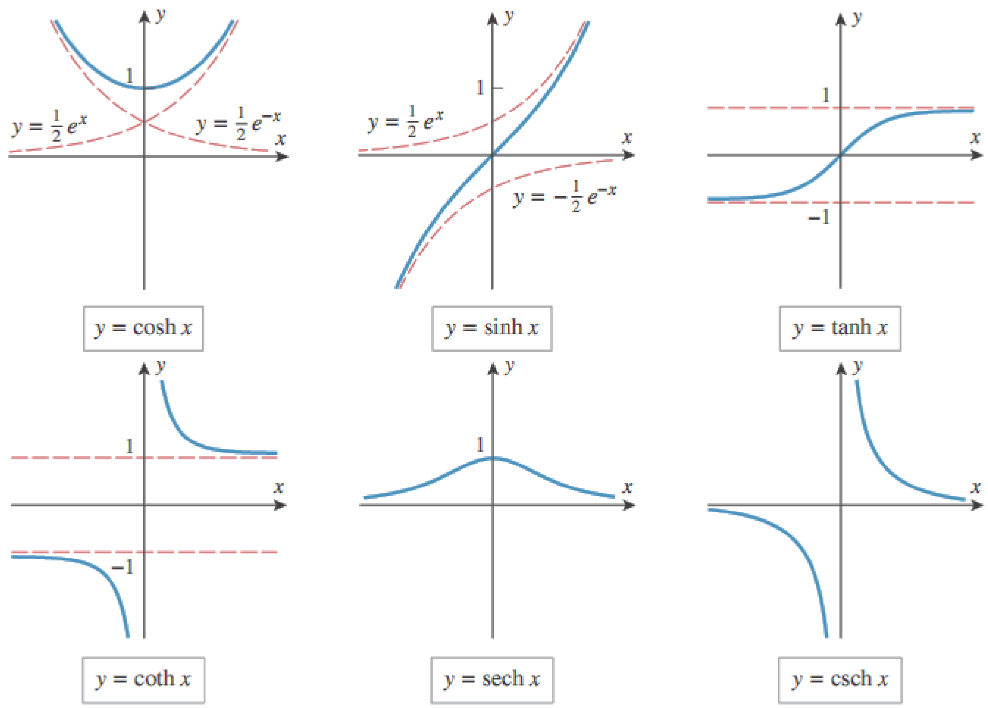
$$\operatorname{argcoth}\theta \equiv \operatorname{Acoth}\theta \equiv \coth^{-1}\theta \qquad \operatorname{argtanh}\theta \equiv \operatorname{Atanh}\theta \equiv \tanh^{-1}\theta$$

$$\cosh^{-1}x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right) \qquad \sinh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

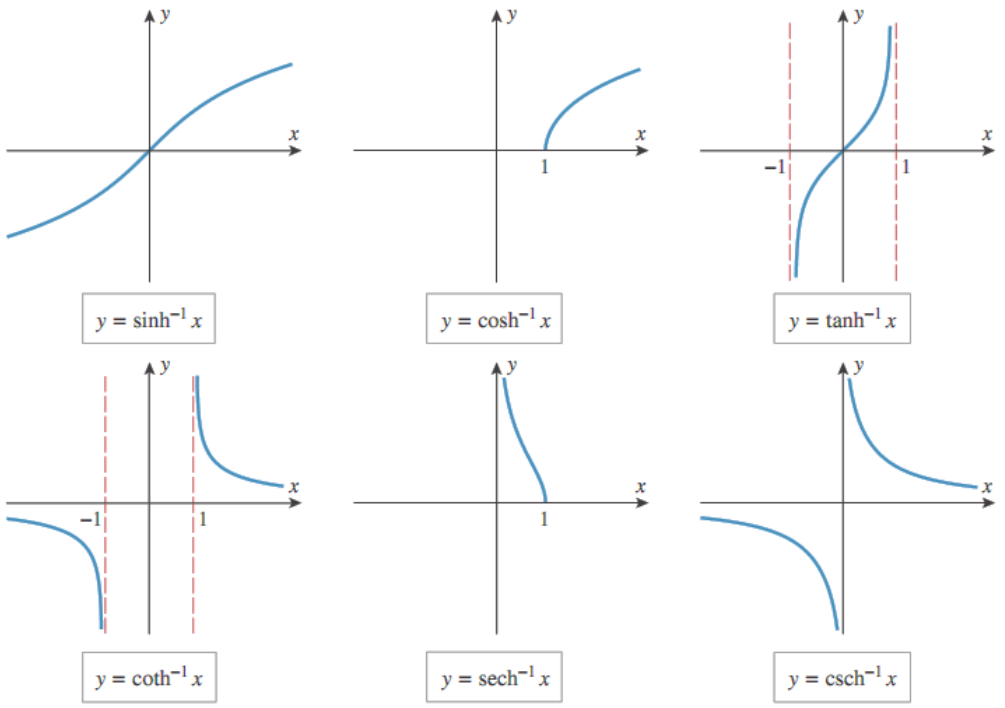
$$\coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \qquad \tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$\operatorname{sech}^{-1}x = \cosh^{-1}\frac{1}{x}\,,\quad \operatorname{csch}^{-1}x = \sinh^{-1}\frac{1}{x}\,,\quad \coth^{-1}x = \tanh^{-1}\frac{1}{x}$$

أشكال الدوال القطعية:



أشكال الدوال القطعية العكسية:



الاشتقاق والتفاضل:

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ فإن مشتقها (في النقطة x_0) يحسب بالعلاقة:

$$y' = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$dy = y'dx = f'(x)dx \implies \frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

$$y = (f\circ g)(x) = f[g(x)] \implies y' = f'_g\cdot g'_x$$

$$[a\,f(x) \pm b\,g(x)]^{(n)} = a\,f^{(n)}(x) \pm b\,g^{(n)}(x)$$

صيغة ليبنز:

$$(u\cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)} \qquad \& \qquad d^n(u\cdot v) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d^k u\cdot d^{n-k}v$$

جدول الاشتقاق والتفاضل:

الدالة أو التابع: $f(x)$	المشتق: $f'(x)$
$y=f(x)\pm g(x)$	$y'=f'(x)\pm g'(x)$
$y=f(x)\cdot g(x)$	$y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}\ ;\ g(x)\neq 0$	$y'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$y=c\ ;\ (c=\text{constant})$	$y'=0$
$y=x$	$y'=1$
$y=a\,x\ ;\ (a=\text{constant})$	$y'=a$
$y=ax+b\ ;\ (a,b=\text{constants})$	$y'=a$
$y=x^n\ ;\ (n\in\mathbb{N})$	$y'=nx^{n-1}$
$y=x^\alpha\ ;\ (\alpha\in\mathbb{R})$	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$
$y=[f(x)]^n\ ;\ (n\in\mathbb{N})$	$y'=n[f(x)]^{n-1}f'(x)$
$y=[f(x)]^\alpha\ ;\ (\alpha\in\mathbb{R})$	$y'=\alpha[f(x)]^{\alpha-1}f'(x)$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y=\sqrt[n]{x}\ ;\ (n\in\mathbb{N})$	$y'=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y=\sqrt[n]{f(x)}\ ;\ (n\in\mathbb{N})$	$y'=\dfrac{f'(x)}{n\sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\sin\big(f(x)\big)$	$y'=f'(x)\cos\big(f(x)\big)$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=\cos\big(f(x)\big)$	$y'=-f'(x)\sin\big(f(x)\big)$
$y=\tan x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
$y=\tan\big(f(x)\big)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{\cos^2\big(f(x)\big)}$
$y=\tan\big(f(x)\big)$	$y'=f'(x)\left[1+\tan^2 x\big(f(x)\big)\right]$
$y=\cot x$	$y'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$
$y=\cot\big(f(x)\big)$	$y'=\dfrac{-f'(x)}{\sin^2\big(f(x)\big)}$
$y=\cot\big(f(x)\big)$	$y'=-f'(x)\left[1+\cot^2 x\big(f(x)\big)\right]$
$y=\sec x=1/\cos x$	$y'=\sec x\tan x$
$y=\sec\big(f(x)\big)$	$y'=f'(x)\sec\big(f(x)\big)\tan\big(f(x)\big)$
$y=\csc x=1/\sin x$	$y'=-\csc x\cot x$
$y=\csc\big(f(x)\big)$	$y'=-f'(x)\csc\big(f(x)\big)\cot\big(f(x)\big)$
$y=\sin^{-1}x=\arcsin x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$
$y=\sin^{-1}\big(f(x)\big)=\arcsin\big(f(x)\big)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$y=\cos^{-1}x=\arccos x$	$y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ 0<y<\pi$
$y=\cos^{-1}\big(f(x)\big)=\arccos\big(f(x)\big)$	$y'=\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$y=\tan^{-1}x=\arctan x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}\ ;\ -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$
$y=\tan^{-1}\big(f(x)\big)=\arctan\big(f(x)\big)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$
$y=\cot^{-1}x=\operatorname{arccot} x$	$y'=\dfrac{-1}{1+x^2}\ ;\ 0<y<\pi$

$y = \cot^{-1}(f(x)) = \operatorname{arccot}(f(x))$	$y' = \dfrac{-f'(x)}{1 + [f(x)]^2}$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \ln(f(x))$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \log_a x$; $(a = \text{constant} ; a > 0)$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$y = \log_a(f(x))$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{f(x)}$	$y' = f'(x)\, e^{f(x)}$
$y = a^x$; $(a = \text{constant} ; a > 0)$	$y' = a^x \ln a$
$y = a^{f(x)}$; $(a = \text{constant} ; a > 0)$	$y' = f'(x)\, a^{f(x)} \ln a$
$y = \sinh x$	$y' = \cosh x$
$y = \sinh(f(x))$	$y' = f'(x) \cosh(f(x))$
$y = \cosh x$	$y' = \sinh x$
$y = \cosh(f(x))$	$y' = f'(x) \sinh(f(x))$
$y = \tanh x$	$y' = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
$y = \tanh(f(x))$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\cosh^2(f(x))}$
$y = \tanh(f(x))$	$y' = f'(x)\, [1 - \tanh^2 x(f(x))]$
$y = \coth x$	$y' = \dfrac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$
$y = \coth(f(x))$	$y' = \dfrac{-f'(x)}{\sinh^2(f(x))}$
$y = \coth(f(x))$	$y' = f'(x)\, [1 - \coth^2 x(f(x))]$

$y = \operatorname{sech} x = 1/\cosh x$	$y' = -\operatorname{sech} x \tanh x$
$y = \operatorname{sech}(f(x))$	$y' = -f'(x) \operatorname{sech}(f(x)) \tanh(f(x))$
$y = \operatorname{csch} x = 1/\sinh x$	$y' = -\operatorname{csch} x \coth x$
$y = \operatorname{csch}(f(x))$	$y' = -f'(x) \operatorname{csch}(f(x)) \coth(f(x))$
$y = \sinh^{-1} x = \operatorname{argsinh} x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$
$y = \sinh^{-1}(f(x)) = \operatorname{argsh}(f(x))$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 + [f(x)]^2}}$
$y = \cos^{-1} x = \operatorname{argcosh} x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; $x^2 > 1$
$y = \cosh^{-1}(f(x)) = \operatorname{argch}(f(x))$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 - 1}}$
$y = \tanh^{-1} x = \operatorname{argtanh} x$	$y' = \dfrac{1}{1 - x^2}$; $x^2 < 1$
$y = \tanh^{-1}(f(x)) = \operatorname{argth}(f(x))$	$y' = \dfrac{f'(x)}{1 - [f(x)]^2}$
$y = \coth^{-1} x = \operatorname{argcoth} x$	$y' = \dfrac{-1}{x^2 - 1}$; $x^2 > 1$
$y = \coth^{-1}(f(x)) = \operatorname{argcth}(f(x))$	$y' = \dfrac{-f'(x)}{[f(x)]^2 - 1}$
$y = \operatorname{sech}^{-1} x = \operatorname{argsech} x$	$y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}$; $\lvert x \rvert < 1$
$y = \operatorname{sech}^{-1}(f(x))$	$y' = \dfrac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$
$y = \operatorname{csch}^{-1} x = \operatorname{argsech} x$	$y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{1 + x^2}}$
$y = \operatorname{csch}^{-1}(f(x))$	$y' = \dfrac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{1 + [f(x)]^2}}$

المشتق النوني لبعض الدوال الشهيرة:

الدالة أو التابع: $y = f(x)$	المشتق النوني: $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$
$y = x^{\alpha}\,;\ \alpha \in \mathbb{R}$	$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}$
$y = x^{m}\,;\ m \in \mathbb{N}$	$y^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1)\,x^{m-n}\,; m>n \\ m! \quad \text{if} \quad m=n \\ 0 \quad \text{if} \quad m<n \end{cases}$
$y = a^{x}\,;\ a \in \mathbb{R}^{+*}$	$y^{(n)} = a^{x}\ln^{n} a$
$y = e^{x}$	$y^{(n)} = e^{x}$
$y = \dfrac{1}{x \pm a}\ ;\ a \in \mathbb{R}$	$y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n}\,n!}{(x \pm a)^{n+1}}$
$y = \ln(x \pm a)$	$y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(x \pm a)^{n}}$
$y = \sin(ax \pm b)$	$y^{(n)} = a^{n}\sin\left(ax \pm b + \dfrac{n\pi}{2}\right)$
$y = \cos(ax \pm b)$	$y^{(n)} = a^{n}\cos\left(ax \pm b + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

النهايات الشهيرة:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$	$\lim\limits_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = e$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n} = e^{x}$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos \alpha x}{\alpha x} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x = 1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1-\cos \alpha x)}{(\alpha x)^{2}} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1-\cos x)}{x^{2}} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{\alpha x} = 1$
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln \alpha x}{\alpha x} = 0$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{k}-1}{x} = k$	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n}}{n!} = 0$
$\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} x^{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan \alpha x}{\alpha x} = 1$

حالات عدم التعيين السبع:

$$\frac{\infty}{\infty}\,,\quad \frac{0}{0}\,,\quad \infty-\infty\,,\quad 0\cdot\infty,\quad 0^{0},\quad \infty^{0},\quad 1^{\infty}$$

قاعدة أوبيتال:

$$\text{if } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ or } \pm\frac{\infty}{\infty} \implies \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

استمرارية دالة:

نقول عن الدالة $y = f(x)$ إنها مستمرة عند النقطة $x = x_0$، إذا كانت الدالة معرفة عند x_0 وكانت النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار عند x_0 وهذه النهاية تساوي قيمة الدالة عند x_0.

المتتاليات والمتسلسلات:

١. المتتاليات الشهيرة:

- المتتالية الثابتة: $S = \{c, c, c, \cdots, c, \cdots\}$، حدها العام $a_n = c$.
- المتتالية الحسابية: $S = \{a, a+r, a+2r, \cdots, a+(n-1)r, \cdots\}$، حدها العام يعطى بالعلاقة: $a_n = a+(n-1)r$. مجموع n حداً الأوائل منها: $S_n = \frac{1}{2}[2a+(n-1)r]$.
- المتتالية الهندسية: $S = \{a, a\cdot r, a\cdot r^{2}, \cdots, a\cdot r^{(n-1)}, \cdots\}$، حدها العام يعطى بالعلاقة: $a_n = a\cdot r^{(n-1)}$. مجموع n حداً الأوائل منها: $S_n = a\frac{1-r^{n-1}}{1-r}\ ;\ r \neq 1$.

٢. المتسلسلات الشهيرة:

- المتسلسلة الهندسية: $\sum P^{n}$ متقاربة عندما $|P| < 1$، ومتباعدة عندما $|P| \geq 1$.
- المتسلسلة التوافقية: $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة، بينما المتسلسلة المتناوبة: $\sum \frac{(-1)^{n}}{n}$ متقاربة.

- متسلسلة ريمان: $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ متقاربة عندما $\alpha > 1$، ومتباعدة عندما $\alpha \leq 1$.
- إذا كانت المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة فإن حدها العام يسعى إلى الصفر: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

اختبارات تقارب المتسلسلات العددية:

سنبدأ باختبارات تقارب **المتسلسلات العددية ذات الحدود الموجبة:**

١. اختبار المقارنة الأول: إذا كانت $\sum a_n , \sum b_n$ حيث $a_n \leq b_n$، فإن $\sum a_n$ تتقارب عندما تكون $\sum b_n$ متقاربة، وتكون $\sum b_n$ متباعدة عندما تكون $\sum a_n$ متباعدة، بمعنى: أصغر من متقاربة تكون متقاربة وأكبر من متباعدة فهي متباعدة. أما أصغر من متباعدة أو أكبر من متقاربة فلا نعلم طبيعتها.

٢. اختبار المقارنة الثاني: إذا كانت $\sum a_n , \sum b_n$ وكان $\alpha \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \beta$ حيث $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ فإن المتسلسلتين من طبيعة واحدة. تتقاربان معاً وتتباعدان معاً.

٣. اختبار مقارنة النهاية (المقارنة الثالث): إذا كانت $\sum a_n , \sum b_n$ وكانت النهاية:

a. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ فإن المتسلسلتين من طبيعة واحدة.

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ وكانت $\sum b_n$ متقاربة فإن $\sum a_n$ متقاربة.

c. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ وكانت $\sum b_n$ متباعدة فإن $\sum a_n$ متباعدة.

٤. اختبار التكامل: تتقارب المتسلسلة $\sum a_n$ إذا تقارب التكامل المعتل $\int_1^{\infty} f(x)dx$، حيث $a_n = f(n)$، وتتباعد المتسلسلة إذا تباعد التكامل المعتل.

٥. اختبار الجذر النوني (كوشي) للمتسلسلة $\sum a_n$	٦. اختبار النسبة (دالامبير) للمتسلسلة $\sum a_n$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$
$L < 1$ تتقارب المتسلسلة، $L > 1$ تتباعد المتسلسلة، $L = 1$ لا نعلم طبيعة المتسلسلة.	

٧. اختبار راب: إذا كانت المتسلسلة $\sum a_n$ في حالة فشل اختبار كوشي أو اختبار دالامبير نحسب النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L$$

فإذا كانت $L > 1$ فإن المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة، وإذا كانت $L < 1$ فإن المتسلسلة متباعدة.

٨. في حالة المتسلسلات الكيفية $\sum a_n$ نقارنها مع متسلسلة القيم المطلقة $\sum |a_n|$، فإذا كانت $\sum |a_n|$ متقاربة فإن $\sum a_n$ تكون متقاربة مطلقاً. أما إذا كانت $\sum a_n$ متقاربة مع تباعد متسلسلة القيم المطلقة $\sum |a_n|$ فإن التقارب يسمى تقارباً شرطياً.

٩. اختبار ليبنز للمتسلسلات المتناوبة $\sum (-1)^n a_n$ حيث إن $a_n \geq 0$ فإن هذه المتسلسلة تتقارب إذا:

a. كانت نهاية الحد العام معدومة أي: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b. متتالية القيم المطلقة متناقصة أي: $a_n \geq a_{n+1} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}$.

متسلسلات القوى (الصحيحة)

هي متسلسلة دالية شكلها العام:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

حيث $a_n \in \mathbb{R}$، ممكن أن يكون سالباً، وعندما $a = 0$ نحصل على متسلسلة القوى المبسطة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

تتقارب هذه المتسلسلات دوماً عندما $x = a$، جميع نقاط التقارب تدعى مجال التقارب.

نصف قطر التقارب حيث: $|x-a| < R$ أو $-R < x - a < R$، يعطى بالعلاقات:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

لسهولة حساب مجال التقارب لـ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ نفرض $y = x - a$، ثم نحسب نصف قطر التقارب ونناقش أطراف المجال فنحصل على المطلوب، وممكن أن نطبق مباشرة اختبارات التقارب.

مثال: عين نصف قطر التقارب ومجال التقارب للمتسلسلات الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n\,,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n\,5^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n$$

الحل: لنعيين أولاً نصف قطر التقارب لكل منها ثم نستنتج مجال التقارب:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n=\sum_{n=1}^{\infty}n^nx^n\Rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right|=0$$

لأن درجة البسط أكبر من درجة المقام ومنه مجال التقارب هو نقطة وحيدة $x=0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}\Rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right|=1\ \Rightarrow x\in\,]-1,1[$$

لندرس طبيعة المتسلسلة عند أطراف المجال:

$$x=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow \text{متباعدة حسب ريمان}$$

$$x=-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{n}}>\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\end{cases}\Rightarrow \text{متقاربة حسب ليبنز}$$

فيصبح مجال التقارب هو: $[-1,1[$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ \Rightarrow\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)n!}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}|n+1|=\infty$$

$$\Rightarrow x\in\,]-\infty,+\infty[$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n\,5^n}\Rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}(n+1)5^{n+1}}{(-1)^n\,n\,5^n}\right|=\lim_{n\to\infty}5\left|\frac{n+1}{n}\right|=5$$

$$\Rightarrow x\in\,]-5,5[$$

لندرس طبيعة المتسلسلة عند أطراف المجال:

$$x=-5\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-5)^n}{n\,5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-5^n}{n\,5^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Rightarrow \text{توافقية متباعدة}$$

$$x=5\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}5^n}{n\,5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0\\[2mm] \dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}\end{cases}\Rightarrow \text{متقاربة حسب ليبنز}$$

فيصبح مجال التقارب هو: $]-5,5]$.

الأخيرة: $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n$ نفرض: $y=x-2$ فتصبح $\sum_{n=1}^{\infty}y^n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}y^n\Rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right|=1\Rightarrow y\in\,]-1,1[$$

$$y=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty\Rightarrow \text{متباعدة}\quad\&\quad y=-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Rightarrow \text{متباعدة}$$

أي أن مجال التقارب هو $y\in\,]-1,1[$، أي: $x-2\in\,]-1,1[$ ومنه: $x\in\,]1,3[$.

خواص متسلسلات القوى:

١) إذا كانت متسلسلة القوى متقاربة في المجال $]-R,R[$ فإن مجموعها $f(x)$ دالة مستمرة.

٢) إذا كانت متسلسلة القوى متقاربة، فإن: $\int\sum a_n(x-a)^n\,dx=\sum a_n\int(x-a)^n dx$.

٣) إذا كانت متسلسلة القوى متقاربة، فإن: $\left(\sum a_n(x-a)^n\right)'=\sum na_n(x-a)^{n-1}$.

تعريف النشر:

نسمي الطرف الأيسر من المساواة:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$$

نشر للدالة $f(x)$، في جوار $x=a$، أو حسب قوى $x-a$.

متسلسلة تايلور ومتسلسلة ماك–لوران:

نطلق اسم متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$، في جوار $x=a$، على متسلسلة القوى:

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

في حالة: $a = 0$ تسمى متسلسلة تايلور في جوار الصفر بمتسلسلة ماك–لوران وهي:

$$f(x) \cong f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

باقي متسلسلة تايلور يعطى بالعلاقة:

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad ; \begin{cases} c = a + \theta(x-a) \\ ; 0 < \theta < 1 \end{cases}$$

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي لتقارب متسلسلة تايلور هو أن يسعى باقيها إلى الصفر عندما: $n \to \infty$.

مثال: أوجد نشر كل من الدوال الآتية في جوار الصفر (حسب ماك لوران)

$$e^x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \sinh x, \quad \cosh x, \quad \ln|1+x|, \quad \arctan x$$

الحل: نبدأ بإيجاد المشتقات:

$$f(x) = e^x \Longrightarrow f(0) = e^0 = 1, \qquad f'(x) = e^x \Longrightarrow f'(0) = e^0 = 1, \qquad \cdots,$$
$$f^{(n)}(x) = e^x \Longrightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1, \cdots$$

$$f(x) \cong f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \Longrightarrow$$

$$e^x \cong 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} ; 0 < c < x$$

واضح أن الباقي $R_n(x)$ يسعى إلى الصفر عندما $n \to \infty$ مهما تكن x، $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \sin x \Longrightarrow f(0) = \sin 0 = 0,$$
$$f'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow f'(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

……………………………………………………,

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \Longrightarrow f'(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad n = 2k \\ (-1)^k & \text{if} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

……………………………………………………,

$$f(x) \cong f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \Longrightarrow$$

$$\sin x \cong 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \left|\frac{\sin\left(c + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} ; 0 < c < x$$

واضح أن الباقي $R_n(x)$ يسعى إلى الصفر عندما $n \to \infty$ مهما تكن x، $\forall x \in \mathbb{R}$.

من أجل نشر الدالة $\cos x$، والتي هي عبارة عن مشتق الدالة $\sin x$، فإن متسلسلة ماك لوران هي:

$$\cos x = (\sin x)' = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

بالنسبة لـ: $\sinh x, \cosh x$، نلجأ إلى نشر الدالة الأسية e^x، حيث إن:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

مع ملاحظة أنه لحساب نشر e^{-x}، نعوض كل x بـ $-x$ في نشر e^x أي:

$$e^{-x} = 1 + \frac{(-x)}{1!} + \frac{(-x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-x)^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \Longrightarrow$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = (\sinh x)'$$

أما بالنسبة لـ: $\ln|1+x|$، دون اللجوء إلى النشر في متسلسلة تايلور نستعين بالمتسلسلة الهندسية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \; ; \; |x| < 1 \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots ; \; |x| < 1 \Longrightarrow (*)$$

نكامل الطرفين من أجل $|x| < 1$ فنجد:

$$\ln|1+x| = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots;\ |x| < 1$$

نعلم بالنسبة لـ: $\arctan x$، أن: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$، لذلك نبدل كل x بـ x^2 في $(*)$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots;\ \ x^2 < 1 \Longrightarrow$$

$$\arctan x = \int \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\int (-1)^n x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Longrightarrow$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots;\ x^2 < 1$$

متسلسلة ذي الحدين (كرخي–نيوتن)

لتكن الدالة: $f(x) = (1+x)^n$، ولنوجد نشرها حسب ماك لوران: لدينا: $f(0) = 1$ و

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1},\qquad f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2},\cdots,$$

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k},\cdots,$$

$$\Longrightarrow f'(0) = n, f''(0) = n(n-1),\cdots,f^{(k)}(0) = n(n-1)\cdots(n-k+1),\cdots$$

نعوض في متسلسلة ماك لوران فنجد:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k + \cdots$$

واضح أن هذه المتسلسلة متقاربة عندما: $|x| < 1$.

مثال: انشر كلاً من الدوال الآتية حسب ماك لوران مستعيناً بنشر متسلسلة ذي الحدين:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, f_2(x) = (1+x)^4, f_3(x) = \arcsin x\ , f_4(x) = \arg\tanh x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\ , f_5(x) = \arctan x\ , f_6(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

الحل: في $f_1(x)$ نعوض $n = -\frac{1}{2}$، في $f_2(x)$ نعوض $n = 4$، في $f_3(x)$ نعوض $n = -\frac{1}{2}$ و x بـ $-x^2$ ، ثم نكامل، لأن $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$، في $f_4(x)$، لدينا:

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \frac{1}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln|1-x|$$

ولدينا من المتسلسلة الهندسية عندما $|x| < 1$ أن $(n = -1)$:

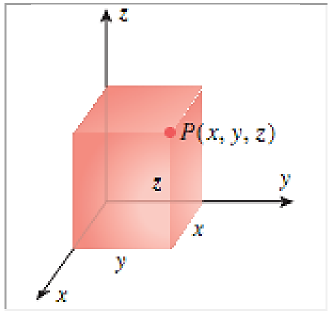
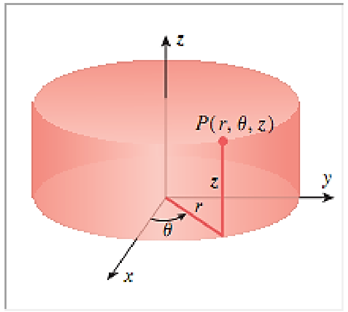
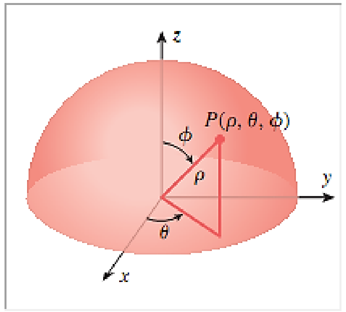
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots,\quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

بالمكاملة والضرب بـ $\frac{1}{2}$ نحصل على المطلوب.

في $f_6(x)$، نعلم أن: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$، نعوض $(n = -1)$ و x بـ x^2 ، ثم نكامل.

الهندسة التحليلية في الفضاء $\mathbb{R}^n$:

الاحداثيات في الفضاء:

الاحداثيات الديكارتية	الاحداثيات الاسطوانية	الاحداثيات الكروية
		
$-\infty < x, y, z < +\infty$	$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$ $-\infty < z < +\infty$	$\rho \geq 0, \quad 0 < \theta < 2\pi$ $0 \leq \varphi \leq \pi$

العلاقة بين أنظمة الاحداثيات الديكارتية والاسطوانية والكروية:

$(r, \theta, z) \to (x, y, z)$ $(x, y, z) \to (r, \theta, z)$	$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = y/x, \quad z = z$	$r \geq 0, \rho \geq 0$ $0 \leq \theta < 2\pi$ $0 \leq \phi \leq \pi$
$(\rho, \theta, \phi) \to (r, \theta, z)$ $(r, \theta, z) \to (\rho, \theta, \phi)$	$r = \rho\sin\phi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho\cos\phi$ $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \theta, \quad \tan\phi = r/z$	
$(\rho, \theta, \phi) \to (x, y, z)$ $(x, y, z) \to (\rho, \theta, \phi)$	$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi$ $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan\theta = y/x, \quad \cos\phi = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	

محدد اليعقوبي:

$$J(r,\theta,z) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

$$J(\rho,\theta,\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\varphi$$

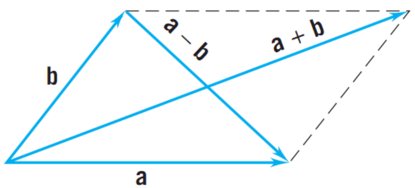
الحركة الدورانية:

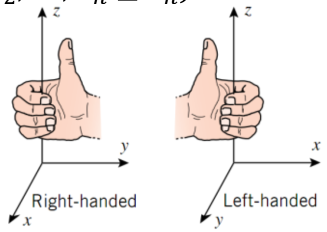
حول ox بزاوية θ	حول oy بزاوية φ	حول oz بزاوية ψ
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

جبر المتجهات:

ليكن المتجهان $a, b \in \mathbb{R}^n$ وكان $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ و $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ فإن:

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \cdots, a_n \pm b_n)$$



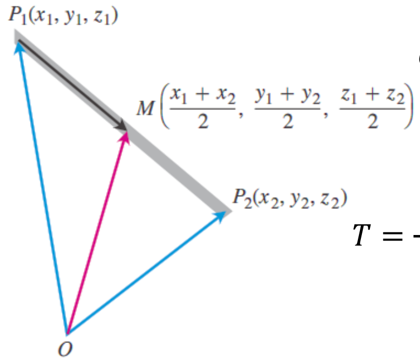


طول متجه:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$
$$\|u\| \geq 0 \quad \& \quad \|\alpha\, u\| = \alpha\,\|u\| \quad \& \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

متجه (شعاع) الواحدة: هو قسمة المتجه على طويلته ويرمز له عادة بـ: a_{unit} أو u_a.

منتصف متجهين:



ليكن المتجهان $a, b \in \mathbb{R}^n$ وكان $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ و $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ فإن متجه منصف المتجهين هو متجه رأسه في منتصف المسافة بين رأسي المتجهين:

$$T = \frac{1}{2}(a + b) = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \cdots, \frac{a_n + b_n}{2}\right)$$

ضرب المتجهات

الجداء العددي (النقطي) (الداخلي) $(\cdot)$ هو عدد وليس متجه.

ليكن المتجهان $a, b \in \mathbb{R}^n$ وكان $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ و $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ فإن:

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \|a\|\|b\| \cos\theta \quad \& \quad a \cdot b \le \|a\|\|b\|$$

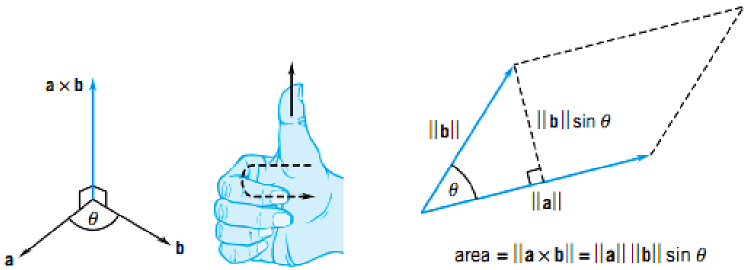
حيث θ هي الزاوية بين المتجهين، ولحساب هذه الزاوية لدينا:

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{\|a\|\|b\|} = \frac{a}{\|a\|} \cdot \frac{b}{\|b\|} = u_a \cdot u_b \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{a \cdot b}{\|a\|\|b\|}\right)$$

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \& \quad c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b \quad \& \quad \alpha(u + v) = \alpha u \cdot v = u \cdot \alpha v$$

$$a \perp b \Rightarrow a \cdot b = 0 \quad \& \quad 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

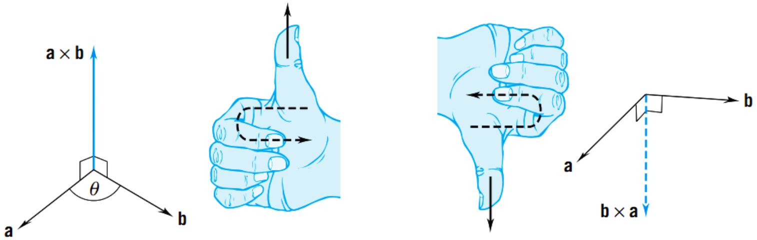
الجداء الخارجي $(\times)$ (في $\mathbb{R}^3$ فقط) هو متجه وليس عدد.



ليكن المتجهان $a, b \in \mathbb{R}^3$ وكان $a = (a_1, a_2, a_3)$ و $b = (b_1, b_2, b_3)$ فإن:

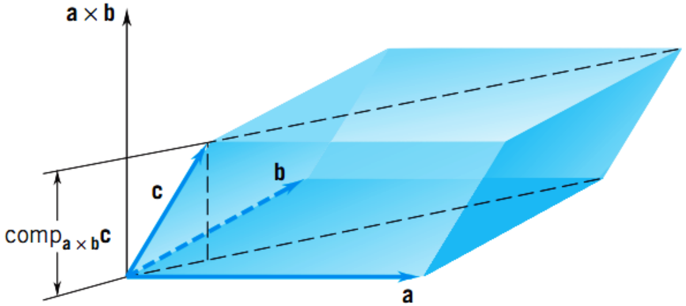
$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

خصائص الجداء الخارجي:



1. $a \times b = -b \times a \qquad \& \qquad a \times a = -a \times a \Rightarrow a \times a = 0$
2. $|a \times b| = \|a\|\|b\| \sin\theta$ مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على المتجهين
3. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c \qquad \& \qquad (a + b) \times c = a \times c + b \times c$
4. $a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

وهو عدد يساوي حجم متوازي المستطيلات المنشأ من المتجهات الثلاثة: a, b, c.



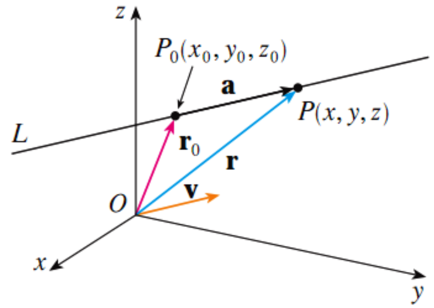
5. $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \quad \& \quad (a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a$
6. $(a \times b) \cdot (c \times d) = \begin{vmatrix} a \cdot c & a \cdot d \\ b \cdot c & b \cdot d \end{vmatrix} = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$
7. $(a \times b) \times (c \times d) = [(a \times b) \cdot d]c - [(a \times b) \cdot c]d$

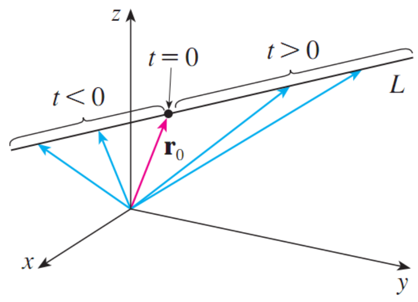
المستقيمات والمستويات في $\mathbb{R}^n$:

١. **معادلة مستقيم مار بنقطة** (رأس متجه) وموازٍ لمتجه الآخر هي: $I(t) = a + bt$. في $\mathbb{R}^3$ يكون:

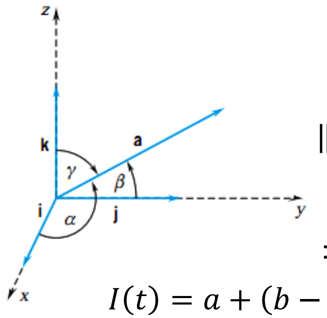
$$I(t) = a + bt = (a_1 + b_1 t)i + (a_2 + b_2 t)j + (a_3 + b_3 t)k = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow t = \frac{x - a_1}{b_1} = \frac{x - a_2}{b_2} = \frac{x - a_3}{b_3}$$





معادلة المستقيم L في الشكل أعلاه هي: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}t$ حيث إن: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}t$



إذا كان $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ وكانت α, β, γ زوايا مع المحاور.

لدينا: $a = \|a\| \cos\alpha \, i + \|a\| \cos\beta \, j + \|a\| \cos\gamma \, k$ ومنه

$$\|a\| = \|a\| \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}$$
$$\Longrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

٢. **معادلة مستقيم مار برأسي متجهين** (بنقطتين): a, b تعطى بالعلاقة:

$$I(t) = a + (b-a)t \qquad \& \qquad I(t) = \alpha\, a + \beta\, b \; ; \; \alpha + \beta = 1$$
$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3} = t$$

العلاقة بين مستقيمين في الفضاء:

إذا كان المستقيمان في مستوٍ، وكانت مركبات متجه توجيه المستقيم الأول متناسبة مع مركبات متجه توجيه المستقيم الثاني كان المستقيمان متوازيين، وإلا فهما متقاطعان، أما إذا كانا في مستويين ولا يتوازيان ولا يتقاطعان، فهما مستقيمان متخالفان (أو مائلان) *skew lines*.

إذا كانت زوايا توجيه الأول: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ وزوايا توجيه الثاني: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ فإنه إذا كان:

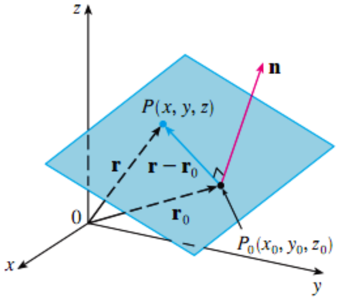
$$\frac{\cos\theta_1}{\cos\beta_1} = \frac{\cos\theta_2}{\cos\beta_2} = \frac{\cos\theta_3}{\cos\beta_3}$$

فالمستقيمان متوازيان، وإذا كان: $\cos\theta_1 \cos\beta_1 + \cos\theta_2 \cos\beta_2 + \cos\theta_3 \cos\beta_3 = 0$

فالمستقيمان متعامدان. أما إذا كانا متقاطعين، فيمكن حساب قيمة الزاوية بينهما φ من العلاقة:

$$\varphi = \cos^{-1}(\cos\theta_1 \cos\beta_1 + \cos\theta_2 \cos\beta_2 + \cos\theta_3 \cos\beta_3)$$

معادلة المستوي في الفضاء $\mathbb{R}^n$:



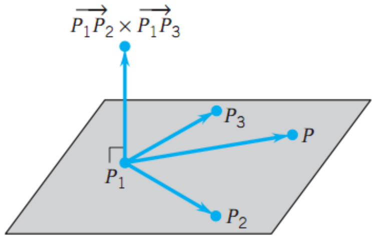
١. **معادلة مستوٍ مار بنقطة معلومة ومتجه متعامد عليه:**

لنفرض أن المستوي يمر برأس المتجه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ومتعامد مع المتجه $n(a, b, c)$ فإن معادلته هي:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

أو بالعلاقة: $ax + by + cz + d = 0$

٢. **معادلة مستوٍ مار بثلاث نقاط معلومة ليست على استقامة واحدة:**

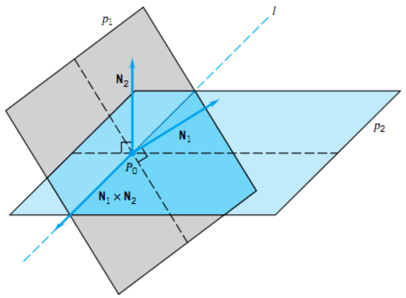


لنفرض أن النقاط: $P_1(x_1, y_1, z_1)$، $P_2(x_2, y_2, z_2)$، $P_3(x_3, y_3, z_3)$ ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

معادلة هذا المستوي يمكن حسابها من المحدد:

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$$
$$or \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

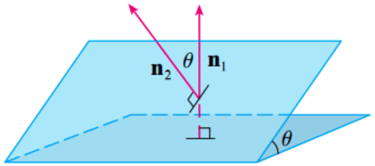
العلاقة بين مستويين: ١. التقاطع ٢. التوازي ٣. التعامد



١. يتقاطع المستويان:

$$\begin{cases} S_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ S_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

بمستقيم مشترك لهما نحسبه، إما بحساب نقطتين مشتركتين منهما، أو من نقطة والمتجه المتعامد مع متجهي الناظمين لهما. $l\colon\; I(t) = \overrightarrow{OP_0} + t(N_1 \times N_2)$



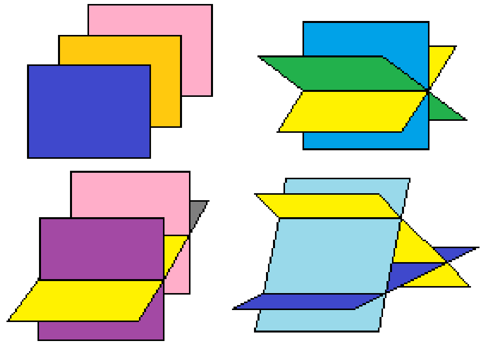
٢. إذا كانت θ الزاوية بين المستويين فهي الزاوية **الحادة** بينهما (أو بين ناظميهما)، فإذا كانت θ منفرجة نحسب مكملتها أي: $\pi - \theta$ ومنه نجد:

$$\cos\theta = \frac{n_1 \times n_2}{\|n_1\| \, \|n_2\|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

إذا كانت $\theta = 0$ فإن المستويين متوازيان أي أن الناظمين متوازيان أي أن: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

إذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ فإن المستويين متعامدان أي أن الناظمين متعامدان: $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

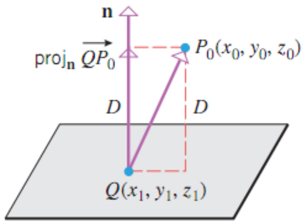
أوضاع ثلاثة مستويات: إذا كانت المستويات هي: $\begin{cases} S_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ S_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ S_3: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$ أشكالها:



يمكن تحديد أوضاعها من رتبة كلا المصفوفتين (مصفوفة الأمثال والمصفوفة الموسعة) أي رتبة:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \& \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

بعد نقطة عن مستقيم:

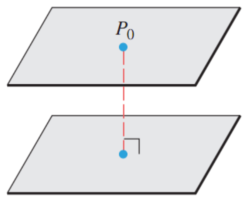


إن قانون بعد النقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ عن المستوي:

$ax + by + cz + d = 0$ يعطى بالعلاقة:

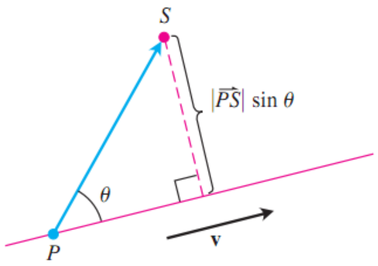
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

البعد بين مستويين متوازيين:



يمكن حسابه بتعيين نقطة من أحدهما وحساب بعدها عن الآخر، أو نقطة من خارجهما وحساب القيمة المطلقة لفرق بعدها عنهما، أو نقطة من داخلهما (بينهما) وحساب مجموع بعدها عنهما.

بعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم:

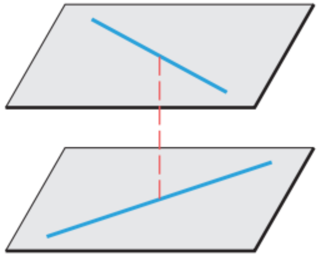


لحساب بعد النقطة S عن المستقيم: $I(t) = P + v\,t$.

بحسب نظرية فيثاغورث في المثلث القائم أو يعطى بالعلاقة:

$$d = \frac{\|\overrightarrow{PS} \times v\|}{\|v\|} \quad or \quad d = \left\| \overrightarrow{PS} - \frac{\overrightarrow{PS} \cdot v}{\|v\|^2} v \right\|$$

البعد بين مستقيمين متخالفين:



إذا كانت معادلتي المستقيمين: $I_1 = a + n_1t,\ I_2 = b + n_2t$

نوجد متجه الواحدة المتعامد مع كلا متجهي توجيه المستقيمين:

$$u_n = \frac{n}{\|n\|} = \frac{n_1 \times n_2}{\|n_1 \times n_2\|}$$

$$d = |\overrightarrow{ab} \cdot u_n| = |(b - a) \cdot u_n| = |\overrightarrow{ba} \cdot u_n|$$

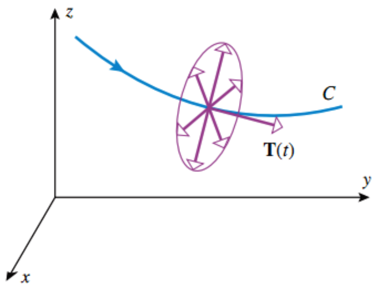
المنحنيات والسطوح في الفضاء $\mathbb{R}^3$

يعرف المنحني في $\mathbb{R}^3$ بالصورة الوسيطية على أنه دالة بمتغير واحد ومتعددة القيم: $\sigma(t): E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\sigma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \qquad Ex.\ \ \sigma(t) = (\cos^3 t\,, 3\sin^2 t\,, 5t - 1)$$

يكون المنحني بسيطاً إذا كان $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$ ونتج عنه: $t_1 = t_2$. ويكون مغلقاً إذا كانت صورة بداية المجال تساوي صورة نهايته. ويكون صقيلاً إذا كان له مشتق في كل نقطة من مجال التعريف.

معادلة المماس والمستوي الناظم في نقطة معلومة من منحني



لتكن $P_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة ما من المنحني c، معادلته $\sigma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$، حيث عندما $t = t_0$ فإن $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ ولنوجد متجه المماس فيها.

$$T(t_0) = \sigma'(t_0) = \big(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\big)$$

وتكون معادلة المماس:

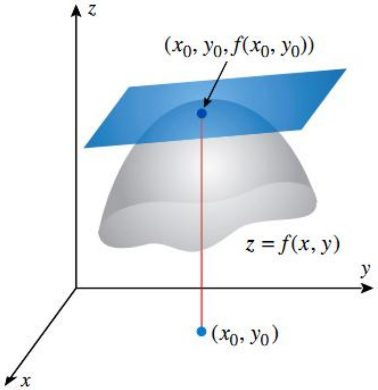
$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)} = \lambda \quad or \quad I(\lambda) = (x_0 + x'\lambda, y_0 + y'\lambda, z_0 + z'\lambda)$$

وتكون معادلة المستوي الناظم: $x'(x-x_0)+y'(y-y_0)+z'(z-z_0)=0$

ويعرف السطح في $\mathbb{R}^3$ على أنه دالة بمتغيرين ويمكن أن تكون بسيطة أو متعددة القيم مثلاً:

$$z=f(x,y)=(f_1,f_2,f_3)=\left(x+y,e^{2x},e^{x^2y}\right)$$

أو $z=f(x,y)=(x^2+3x-y)e^{\frac{x^2+y^2}{2}}$، أو بالصورة الضمنية: $F(x,y,z)=0$.



معادلة المماس والمستوي الناظم في نقطة معلومة من سطح

إذا كان السطح معطىً بالعلاقة الضمنية: $F(x,y,z)=0$.

ولحساب معادلة المستوي المماس في النقطة: $P_0(x_0,y_0,z_0)$ المعلومة من السطح. إن نسب توجيه السطح المماس هي:

$$(F'_x,F'_y,F'_z)\quad or\quad (f'_x,f'_y,-1)$$

فتكون معادلة المستوي المماس في النقطة المعلومة:

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

وتكون معادلة المستقيم الناظم:

$$\frac{(x-x_0)}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(y-y_0)}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(z-z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}=t\qquad or$$

$$\frac{(x-x_0)}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{(y-y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{(z-z_0)}{-1}=t$$

وإذا كان السطح معطىً بالعلاقة الوسيطية: $F\left(x(t),y(t),z(t)\right)$، عند t_0 لدينا: $P_0(x_0,y_0,z_0)$،

فإن معادلتي السطح المماس والمستقيم الناظم هما:

$$F'_x(x-x_0)+F'_y(y-y_0)+F'_z(z-z_0)=0,\ \frac{(x-x_0)}{F'_x}=\frac{(y-y_0)}{F'_y}=\frac{(z-z_0)}{F'_z}$$

ومعادلتي المماس والمستوي الناظم هما:

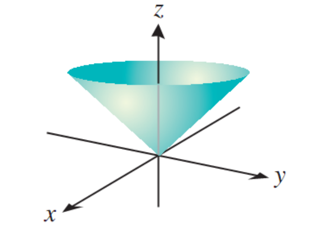
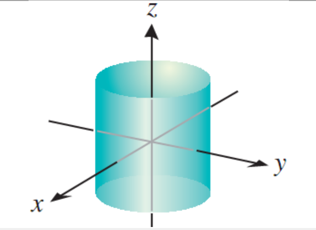
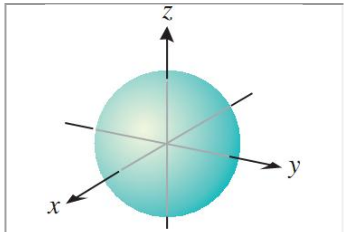
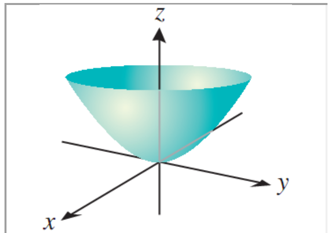
$$x'_t(x-x_0)+y'_t(y-y_0)+z'_t(z-z_0)=0,\ \frac{(x-x_0)}{x'_t}=\frac{(y-y_0)}{y'_t}=\frac{(z-z_0)}{z'_t}$$

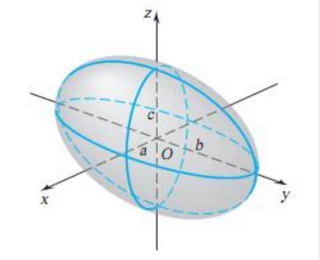
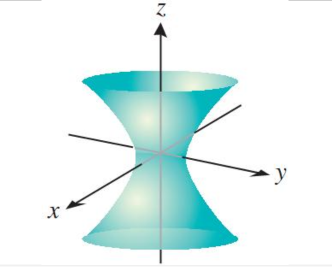
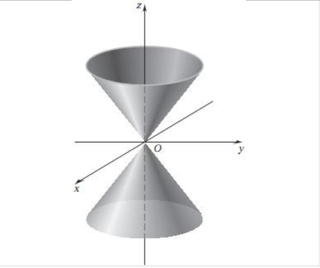
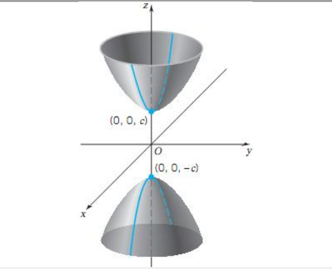
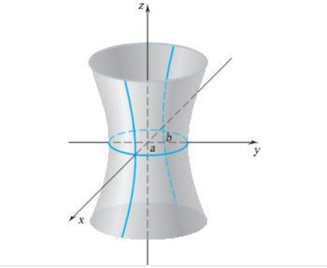
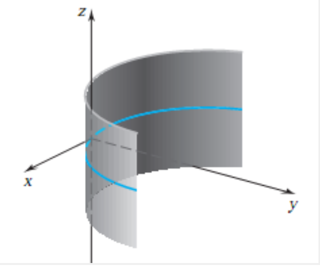
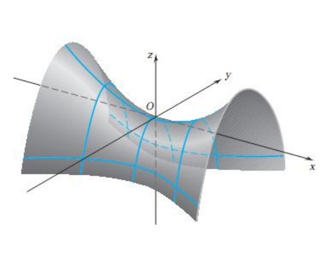
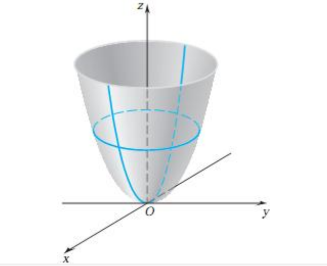
سطوح الدرجة الثانية الخاصة:

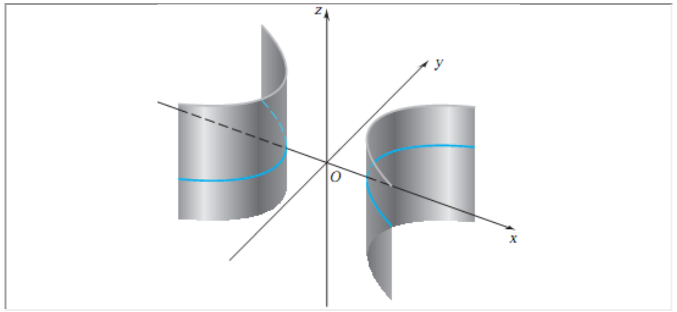
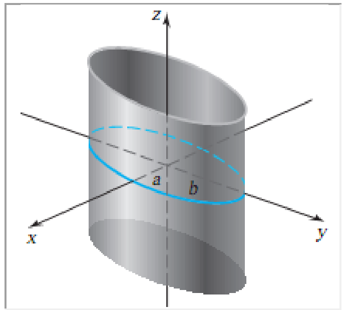
شكلها العام:

$$F(x,y,z)=A\,x^2+B\,y^2+C\,z^2+2E\,xy+2F\,xz+2L\,yz+2P\,x+2Q\,y+2R\,z+D=0$$

$$A,B,C,E,F,L,P,Q,R,D\in\mathbb{R}$$

نوع السطح	المخروط الدوراني	الاسطوانة
شكل السطح		
في الاحداثيات الديكارتية	$z=\sqrt{x^2+y^2}$	$x^2+y^2=a^2$
في الاحداثيات الاسطوانية	$z=r$	$r=a$
في الاحداثيات الكروية	$\varphi=\frac{\pi}{4}=\text{constant}$	$\rho=a\csc\varphi$
نوع السطح	الكرة	القطع المكافئ الدوراني
شكل السطح		
في الاحداثيات الديكارتية	$x^2+y^2+z^2=c^2$	$z=x^2+y^2$
في الاحداثيات الاسطوانية	$z^2=c^2-r^2$	$z=r^2$
في الاحداثيات الكروية	$\rho=c$	$\rho=\cos\varphi\csc^2\varphi$

القطع الناقص الدوراني	القطع الزائد الدوراني	نوع السطح
		شكل السطح
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$x^2+y^2-z^2=1$	في الاحداثيات الديكارتية
	$z^2=r^2-1$	في الاحداثيات الاسطوانية
	$\rho^2=-\sec 2\varphi$	في الاحداثيات الكروية
		
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
		
$x^2=4cy$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

	
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

أمثلة عن السطوح:

١– عين نوع السطح الممثل للمعادلة من الدرجة الثانية الآتية:

$$F(x,y,z)=x^2+2y^2-4z^2+3x-12y-8z-10=0$$

الحل: بالإتمام إلى مربع كامل لدينا:

$$x^2+3x+2(y^2-6y)-4(z^2+2z)=10 \implies$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+2(y-3)^2-4(z+1)^2=10+\frac{9}{4}+18-4=\frac{105}{4} \implies$$

$$\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{105}{4}}+\frac{(y-3)^2}{\frac{105}{8}}-\frac{(z+1)^2}{\frac{105}{16}}=1 \implies$$

وهي معادلة مجسم قطع زائد وحيد الفرع مركزه $\left(-\frac{3}{2},3,-1\right)$ وأنصاف أقطاره:

$$a=\frac{\sqrt{105}}{2}, \qquad b=\frac{\sqrt{105}}{2\sqrt{2}}, \qquad c=\frac{\sqrt{105}}{4}$$

٢– حدد نوع السطح الممثل بالعلاقة التربيعية الآتية:

$$Q(x,y,z)=4x^2+4y^2+4z^2+4xy+4xz+4yz-10=0$$

الحل: إن الشكل التربيعي Q يكتب بالشكل المصفوفي:

$$Q(x,y,z)=(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-10=0$$

لنوجد الشكل التربيعي النظامي له وذلك بإيجاد القيم الذاتية للمصفوفة: $A=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}$، لدينا:

$$|A-\lambda I_3|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}4-\lambda&2&2\\2&4-\lambda&2\\2&2&4-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow \lambda^3-12\lambda^2+36\lambda-32=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-8)=0 \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=2\,,\qquad \lambda_3=8$$

ومنه الشكل التربيعي Q يتحول إلى الشكل التربيعي النظامي Q' الذي صورته:

$$Q'(x_1,y_1,z_1)=(x_1\quad y_1\quad z_1)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}-10=0 \Longrightarrow$$

$$2\,x_1^2+2\,y_1^2+8\,z_1^2=10 \Longrightarrow \frac{x_1^2}{5}+\frac{y_1^2}{5}+\frac{z_1^2}{\frac{5}{4}}=1$$

وهي معادلة مجسم قطع ناقص.

٣- حدد نوع السطح الممثل بالشكل التربيعي الآتي:

$$Q(x,y,z)=-2y^2+3z^2-4xy-5x-6y=8$$

الحل: إن الشكل التربيعي Q يحوي حد تدوير $-4xy$ وإزاحة $-5x-6y$ ويكتب بالشكل المصفوفي:

$$Q(x,y,z)=(x\quad y\quad z)\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&-2&0\\-2&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-(5\quad 6\quad 0)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=8$$

لنوجد الشكل التربيعي النظامي له وذلك بإيجاد القيم الذاتية للمصفوفة: $A=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&-2&0\\-2&0&3\end{pmatrix}$،

لدينا:

$$|\lambda I_3-A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda&0&2\\0&\lambda+2&0\\2&0&\lambda-3\end{vmatrix}=0\Rightarrow \lambda(\lambda+2)(\lambda-3)-4(\lambda+2)$$

$$=0 \Longrightarrow (\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda+1)=0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1=-2\,,\qquad \lambda_2=4\,,\qquad \lambda_3=-1$$

ومنه الشكل التربيعي Q يتحول إلى الشكل التربيعي النظامي Q' الذي صورته:

$$Q'(x_1,y_1,z_1)=(x_1\quad y_1\quad z_1)\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&4&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}-5x_1-6y_1=8 \Longrightarrow$$

$$2\,x_1^2-4\,y_1^2+\,z_1^2+5x_1+6y_1=-8 \Longrightarrow$$

نتمم إلى مربع كامل نجد:

$$2\left(x_1+\frac{5}{4}\right)^2-4\left(y_1-\frac{3}{4}\right)^2+z_1^2=-\frac{114}{16} \Longrightarrow$$

$$\frac{\left(x_1+\frac{5}{4}\right)^2}{\frac{114}{32}}-\frac{\left(y_1-\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{114}{64}}+\frac{(z_1-0)^2}{\frac{114}{16}}=-1 \Longrightarrow$$

وهي معادلة مجسم قطع زائد ذي فرعين باتجاه المحور oy_1 مركزه $\left(-\frac{5}{4},\frac{3}{4},0\right)$.

٤- حدد نوع السطح الممثل بالشكل التربيعي الآتي:

$$Q(x,y,z)=xy+xz+yz=0$$

الحل: إن الشكل التربيعي Q يكتب بالشكل المصفوفي:

$$Q(x,y,z)=(x\quad y\quad z)\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\1/2&0&1/2\\1/2&1/2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$

لنوجد الشكل التربيعي النظامي بإيجاد القيم الذاتية للمصفوفة: $A=\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\1/2&0&1/2\\1/2&1/2&0\end{pmatrix}$، لدينا:

$$|\lambda I_3-A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda&-1/2&-1/2\\-1/2&\lambda&-1/2\\-1/2&-1/2&\lambda\end{vmatrix}=0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lambda_1=\frac{1}{2}\,,\qquad \lambda_2=1\,,\qquad \lambda_3=-\frac{1}{2} \Longrightarrow$$

ومنه نحصل على الشكل التربيعي:

$$\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_3^2}{2}=0$$

وهو مخروط دوراني ذو فرعين فيه: $a=b=c=\sqrt{2}$.

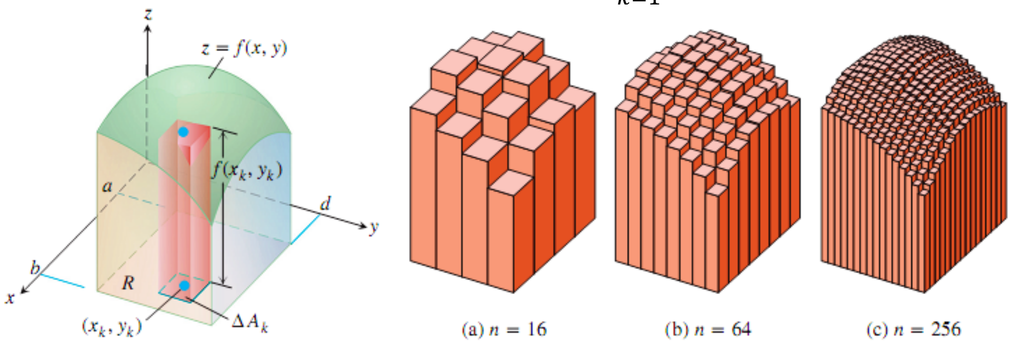
ملاحظة: في سطوح الدرجة الثانية والتي معادلتها لا تحتوي على حدود جداء بين المتغيرات (تدوير) يمكن كتابة المستوي المماس للسطح عند النقطة $P_0(x_0,y_0,z_0)$ بإجراء التبديلات الآتية في معادلة السطح:

$$x^2\to xx_0,\ \ y^2\to yy_0,\ \ z^2\to zz_0,\ \ 2x\to x+x_0,\ \ 2y\to y+y_0,\ \ 2z\to z+z_0$$

التكامل المتعدد:

١. التكامل الثنائي:

$$\iint_R f(x,y)dA \quad or \quad \iint_R f(x,y)dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)dA_k=\text{Volume}$$



نظرية فوبيني:

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dx\,dy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dy\,dx$$

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_c^d\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\,dy=\int_a^b\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dy\,dx$$

خواص التكامل الثنائي:

$$\iint_R c\,f(x,y)dA=c\iint_R f(x,y)dA \quad ; \quad c=\text{constant}$$

$$\iint_R [f(x,y)\pm g(x,y)]dA=\iint_R f(x,y)dA\pm\iint_R g(x,y)dA \quad ; \quad f,g:\text{مستمرين}$$

$$\iint_R f(x,y)dA\ge\iint_R g(x,y)dA \qquad \text{if} \quad f(x,y)\ge g(x,y)$$

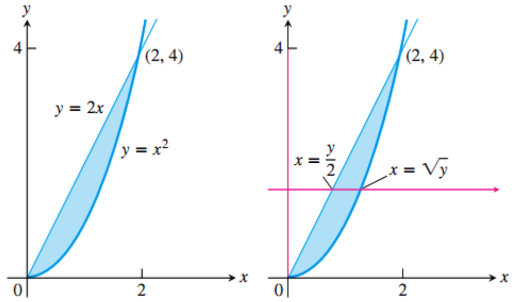
$$\iint_R f(x,y)dA\ge 0 \qquad \text{if} \quad f(x,y)\ge 0$$

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_c^d\int_a^b g(x)h(y)dx\,dy=\left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right)$$

$$\iint_R f(x,y)dA=\iint_{R_1} f(x,y)dA+\iint_{R_2} f(x,y)dA \ ; \ R=R_1\cup R_2\ \&\ R_1\cap R_2=\emptyset$$

مثال: احسب قيمة التكامل الآتي:

$$I=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(4x+2)dy\,dx$$



الحل: يمكن أخذ شريحة موازية لمحور السينات وبتطبيق نظرية فوبيني نجد:

$$y=2x\Rightarrow x=\frac{y}{2},\ y=x^2\Rightarrow x=\sqrt{y}$$

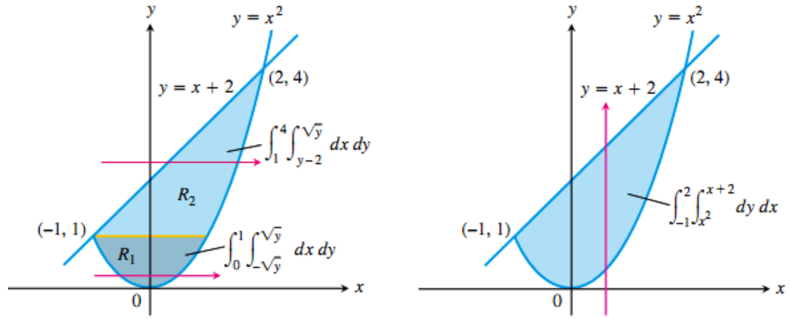
$$I=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(4x+2)dy\,dx=\int_0^4\int_{y/2}^{\sqrt{y}}(4x+2)dx\,dy=\int_0^4[2x^2+2x]_{y/2}^{\sqrt{y}}dy$$

$$\Rightarrow I=\int_0^4\left(y+2\sqrt{y}-\frac{y^2}{2}\right)dy=\left[\frac{y^2}{2}+4\frac{\sqrt{y^3}}{3}-\frac{y^3}{6}\right]_0^4=8$$

حساب المساحة والعزوم ومراكز الثقل:

لحساب مساحة المنطقة A في المستوي xoy، تعطى بالعلاقة: $A=\iint dA$، أي أن $f(x,y)=1$.

مثال: احسب مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $y=x^2$ والمستقيم $y=x+2$.



الحل: يمكن حسابه بالشكل (المنطقة اليسرى):

$$I=\iint_{R_1} dA+\iint_{R_2} dA=\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dx\,dy=\int_1^4\int_{y-2}^{\sqrt{y}}dx\,dy$$

أو يمكن حسابه بالشكل (المنطقة اليمنى):

$$I=\iint_R dA=\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2}dy\,dx=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

مساحة سطح دالة: تعطى مساحة الدالة $f(x,y)$ المعرفة على المنطقة R من xoy بالعلاقة:

$$S=\iint_R\sqrt{(f_x')^2+\left(f_y'\right)^2+1}\quad dx\,dy$$

القيمة الوسطى: القيمة الوسطى للدالة f فوق المنطقة R تعطى بالعلاقة:

$$\textbf{Average Value}=\frac{1}{\text{Area of }R}\iint_R f(x,y)dA$$

مثال: أوجد القيمة الوسطى للدالة: $f(x,y)=x\cos xy$ فوق المستطيل R: $R:0\le x\le\pi$, $0\le y\le 1$.

الحل: لنحسب أولاً قيمة التكامل: $I=\iint_R f(x,y)dA=\iint_R(x\cos xy)dA$.

$$I=\int_0^{\pi}\int_0^1(x\cos xy)\,dydx=\int_0^{\pi}[\sin xy]_0^1dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=[-\cos x]_0^{\pi}$$
$$=2$$

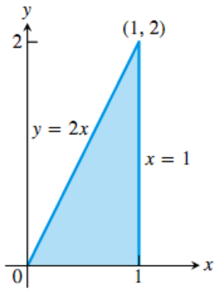
مساحة المستطيل R هي: π. ومنه القيمة الوسطى هي: $2/\pi$.

العزوم الأولية ومراكز الثقل: تعطى العزوم الأولية والكتل ومراكز الثقل بالعلاقات:

Mass: $M=\iint_R\delta(x,y)dA$; $\delta(x,y)$ is the density at (x,y)

First Moments: $M_x=\iint_R y\,\delta(x,y)dA$ & $M_y=\iint_R x\,\delta(x,y)dA$

Center of Mass: $\bar{y}=\dfrac{M_x}{M}$ & $\bar{x}=\dfrac{M_y}{M}$



مثال: صفيحة مثلثية مبينة في الشكل المجاور، أوجد كتلة الصفيحة والعزوم الأولية ومركز ثقلها إذا كانت دالة الكثافة في النقطة (x,y) هي:

$$\delta(x,y)=6x+6y+6$$

الحل: لنوجد قيمة كتلة الصفيحة:

$$M=\int_0^1\int_0^{2x}\delta(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^{2x}(6x+6y+6)dydx$$

$$M=\int_0^1[6xy+3y^2+6y]_0^{2x}dx=\int_0^1(24x^2+12x)dx=[8x^3+6x^2]_0^1=14$$

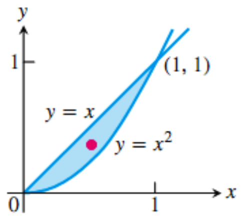
$$M_x=\int_0^1\int_0^{2x}y\,\delta(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^{2x}(6xy+6y^2+6y)dydx$$

$$M_x=\int_0^1[3xy^2+2y^3+3y^2]_0^{2x}dx=\int_0^1(28x^3+12x^2)dx=[7x^4+4x^3]_0^1$$
$$=11$$

$$M_y=\int_0^1\int_0^{2x}x\,\delta(x,y)dydx=10$$

$$\Longrightarrow\ \bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}\qquad\&\qquad\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{11}{14}$$

لحساب مراكز التوازن للأشكال الهندسية نحسب $\bar{x}$ و $\bar{y}$ بعد تعويض $\delta(x,y)=1$.



مثال: أوجد مركز المنطقة الموضحة بالشكل المجاور.

الحل: لنحسب M و M_x و M_y.

$$M=\int_0^1\int_{x^2}^{x}1\,dydx=\int_0^1(x-x^2)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

$$M_x=\int_0^1\int_{x^2}^{x}y\,dydx=\int_0^1\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x^2}^{x}dx=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2}\right)dx=\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{10}\right]_0^1=\frac{1}{15}$$

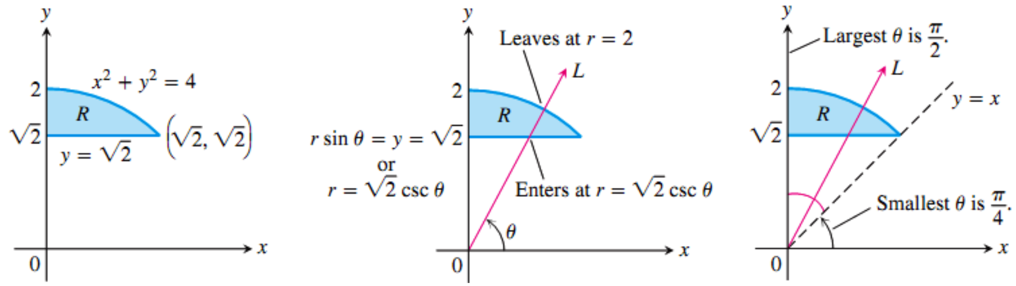
$$M_y=\int_0^1\int_{x^2}^{x}x\,dydx=\int_0^1[xy]_{x^2}^{x}dx=\int_0^1(x^2-x^3)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2} \quad \& \quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5} \Rightarrow (\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{1}{2},\frac{2}{5}\right)$$

التكامل الثنائي في الإحداثيات القطبية:

$$\iint_R f(r,\theta)dA=\iint_R f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta=\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

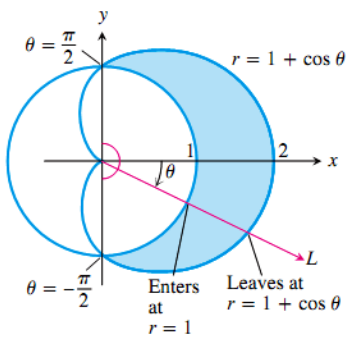
الخطوة الأهم هي تحديد حدود التكامل في الإحداثيات القطبية فإذا كنا نكامل مثلاً على المنطقة المحددة بالمنحنيات $x^2+y^2=4,\ y=\sqrt{2},\ x=0$ والموجودة في الربع الأول نجد أن:



$$\iint_R f(r,\theta)dA=\iint_R f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta=\int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2}\int_{r=\sqrt{2}\csc\theta}^{r=2} f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

مثال: أوجد حدود التكامل للدالة $f(r,\theta)$ على المنطقة R:

خارج الدائرة $r=1$ وداخل الكارديوئيد $r=1+\cos\theta$.



الحل: نلاحظ أن $-\pi/2\le\theta\le\pi/2$. ويكون التكامل:

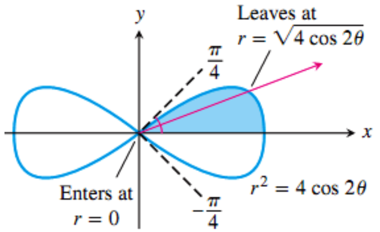
$$\int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2}\int_{r=1}^{r=1+\cos\theta} f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

وتعطى مساحة منطقة R بالإحداثيات القطبية بالعلاقة:

$$\text{Area of } R=A=\iint_R 1\, dA=\iint_R r\, dr\, d\theta$$

مثال: أوجد مساحة المنطقة الموجودة داخل الليمنسكات $r^2=4\cos 2\theta$.

الحل: نحسب مساحة المنطقة الموجودة في الربع الأول ونضربها بـ 4. وتكون المساحة:

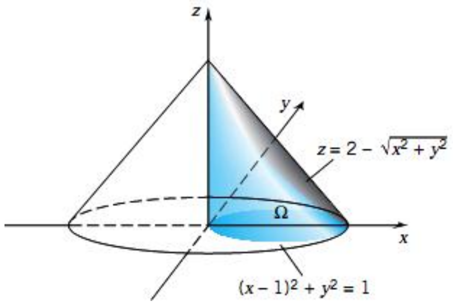


$$A=4\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4}\int_{r=0}^{r=\sqrt{4\cos 2\theta}} r\, dr\, d\theta=4\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} d\theta$$

$$=4\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} 2\cos 2\theta\, d\theta=4[\sin 2\theta]_0^{\pi/4}=4$$

وتعطى صيغة الانتقال من التكامل في الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية بالشكل:

$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy=\iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$



مثال: أوجد حجم الجسم المحدد من الأعلى بالمخروط $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$، ومن الأسفل بالقرص $\Omega: (x-1)^2+y^2\le 1$.

الحل: إن الحجم المطلوب يعطى بالعلاقة:

$$V=\iint_\Omega z\, dA=\iint_\Omega f(x,y)\, dx\, dy \Rightarrow$$

$$V=\iint_\Omega \left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy \Rightarrow$$

$$V=\iint_\Omega 2\, dxdy-\iint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy=2(\text{area of } \Omega)-\iint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

نستخدم الإحداثيات القطبية لحساب التكامل الثاني، لدينا:

$$(x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2=2x \Rightarrow r^2=2r\cos\theta \Rightarrow r=2\cos\theta$$

$$\Gamma \Rightarrow \Omega: -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2} \ \&\ 0\le r\le 2\cos\theta$$

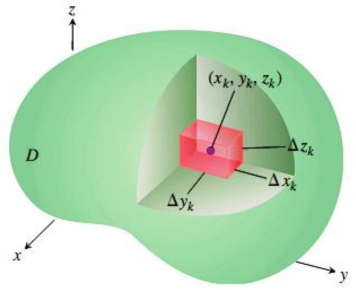
$$\iint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy=\iint_\Gamma r^2\, drd\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\, drd\theta=\frac{32}{9}\Rightarrow$$

$$V = 2(\pi) - \frac{32}{9} \cong 2.73$$

٢. التكامل الثلاثي:

لحساب التكامل الثلاثي للدالة $F(x,y,z)$، على المنطقة D،
نأخذ حجيم $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$ ثم نوجد المجموع:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$$

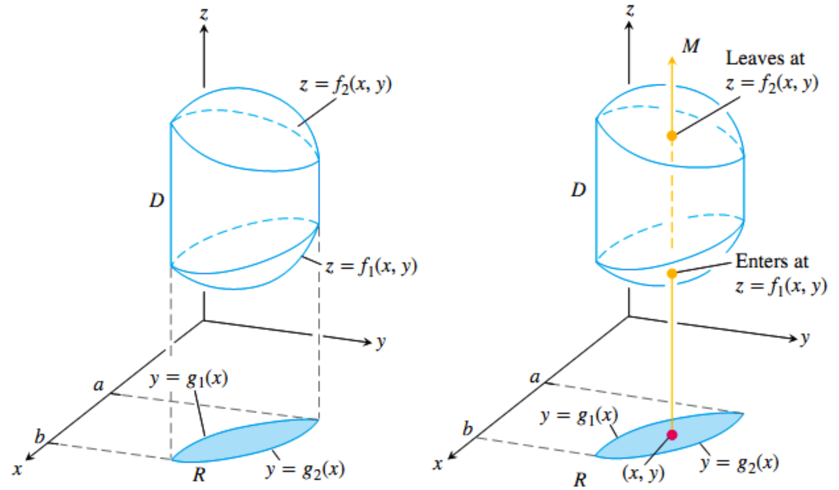


فيكون التكامل الثلاثي للدالة $F(x,y,z)$، على المنطقة D هو:

$$\iiint_D F(x,y,z)dx\,dy\,dz = \lim_{n\to\infty} S_n \quad ; \quad V = \iiint_D 1 \cdot dx\,dy\,dz$$

عندما $F(x,y,z) = 1$ فإن التكامل الثلاثي يساوي حجم المنطقة D المكامل عليها.

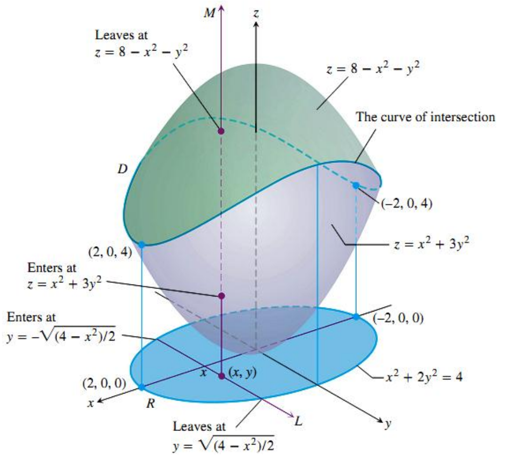
حساب حدود التكامل الثلاثي:



يمكن الاستفادة من نظرية فيوبيني للانتقاء الأمثل لحدود التكامل، في الشكل أعلاه نلاحظ أن التكامل الثلاثي على المنطقة D الحدود يمكن حسابه بالشكل الآتي:

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

مثال: احسب حجم المنطقة المحصورة بالسطحين:
$z = 8 - x^2 - y^2$ و $z = x^2 + 3y^2$.



الحل: إن الحجم يعطى بالعلاقة:

$$V = \iiint_D dx\,dy\,dz$$

لنوجد منحني تقاطع السطحين بالحل المشترك:

$$x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2 \implies$$

ومنه $x^2 + 2y^2 = 4$ هي معادلة قطع ناقص.

ومنه فإن حدود التكامل تكون:

$$x^2 + 3y^2 \le z \le 8 - x^2 - y^2\,,$$
$$-\sqrt{(4-x^2)/2} \le y \le \sqrt{(4-x^2)/2}\,, \qquad -2 \le x \le 2$$

ويكون الحجم V:

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{\frac{(4-x^2)}{2}}}^{\sqrt{\frac{(4-x^2)}{2}}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{\frac{(4-x^2)}{2}}}^{\sqrt{\frac{(4-x^2)}{2}}}(8 - 2x^2 - 4y^2)dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[(8-2x^2)y - \frac{4}{3}y^3\right]_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[2(8-2x^2)\sqrt{\frac{(4-x^2)}{2}} - \frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]dx$$

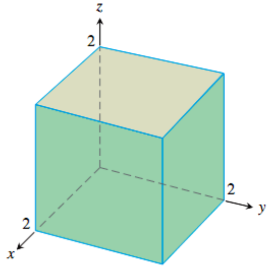
$$= \int_{-2}^{2}\left[8\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = 8\pi\sqrt{2}$$

القيمة الوسطى لدالة في الفضاء:

القيمة الوسطى للدالة F فوق المنطقة D تعطى بالعلاقة:

$$\textbf{Average Value} = \frac{1}{\text{Volume of } D}\iiint_D F(x,y,z)dV$$

مثال: أوجد القيمة الوسطى للدالة: $F(x,y,z)=xyz$ فوق المكعب الموجود في الثمن الأول والمحصور بالمستويات: $x=2,\ y=2,\ z=2$.



الحل: حجم المكعب هو: $\text{volume}=(2)^3=8$

لنحسب الآن التكامل للدالة $F(x,y,z)=xyz$ فوق هذا المكعب:

$$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 xyz\,dx\,dy\,dz=\int_0^2\int_0^2\left[\frac{x^2}{2}yz\right]_0^2 dy\,dz=$$

$$\int_0^2\int_0^2 2yz\,dy\,dz=\int_0^2[y^2]_0^2 z\,dz=\int_0^2 4z\,dz=[2z^2]_0^2=8\ \Longrightarrow$$

$$\textbf{Average value of } xyz \text{ over the cube}=\frac{1}{\text{Volume}}\iiint_{\text{cube}} xyz\,dV=\left(\frac{1}{8}\right)8=1$$

نظرية فيوبيني:

$$\iiint_D f(x,y,z)dV=\int_i^j\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

$$=\int_a^b\int_c^d\int_i^j f(x,y,z)dz\,dy\,dx=\cdots\ (3!=6\ cases)$$

ويمكن أن تعمم على مناطق غير بسيطة.

خواص التكامل الثلاثي:

$$\iiint_D cf(x,y,z)dV=c\iiint_D f(x,y,z)dV\quad;\quad c=\text{constant}$$

$$\iiint_D [f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]dV=\iiint_D f(x,y,z)dV\pm\iiint_D g(x,y,z)dV$$

$$\iiint_D f(x,y,z)dV\geq\iiint_D g(x,y,z)dV\quad \text{if}\quad f(x,y,z)\geq g(x,y,z)$$

$$\iiint_D f(x,y,z)dV\geq 0\quad \text{if}\quad f(x,y,z)\geq 0$$

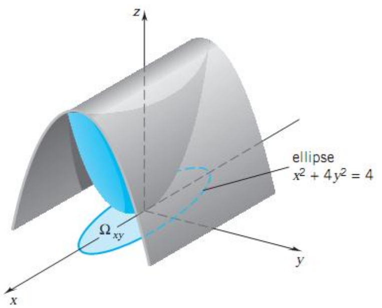
$$\iiint_D f(x,y,z)dV=\int_i^j\int_c^d\int_a^b g(x)h(y)k(z)dx\,dy\,dz=$$

$$=\left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right)\left(\int_i^j k(z)dz\right)$$

$$\iiint_D f(x,y,z)dV=\iiint_{D_1} f(x,y,z)dV+\cdots+\iiint_{D_n} f(x,y,z)dV\ ;$$

$$D=D_1\cup\cdots\cup D_n\quad \&\quad D_i\cap D_j=\emptyset\ (i\neq j)$$

مثال: مستعيناً بالتكامل الثلاثي، أوجد حجم الجسم المحصور من الأعلى بالقطع المكافئ الأسطواني: $z=4-y^2$، ومن الأسفل بالقطع المكافئ الناقصي $z=x^2+3y^2$.



الحل: لإيجاد المسقط على المستوي xoy نوجد المنحني المشترك وذلك بالحل المشترك للسطحين:

$$z=4-y^2=x^2+3y^2\Longrightarrow x^2+4y^2=4$$

وهي معادلة قطع ناقص Ω_{xy} فتكون حدود التكامل على المسقط في المستوي xoy:

$$\Omega_{xy}:-2\leq x\leq 2\qquad \&\qquad -\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\leq y\leq\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$$

فتكون حدود التكامل الثلاثي:

$$-2\leq x\leq 2,\ \ -\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\leq y\leq\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2},\ \ x^2+3y^2\leq z\leq 4-y^2$$

$$V=\int_{-2}^{2}\int_{\frac{-1}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+3y^2}^{4-y^2}dz\,dy\,dx=4\int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+3y^2}^{4-y^2}dz\,dy\,dx=4\pi$$

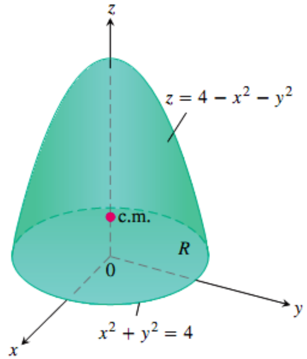
العزوم الأولية ومراكز الثقل: تعطى العزوم الأولية والكتل ومراكز الثقل بالعلاقات:

Mass: $M=\iiint_D\delta(x,y,z)dV$; $\delta(x,y,z)$ is the density at (x,y,z)

First Moments: $M_{yz}=\iiint_D x\delta\,dV,\quad M_{xz}=\iiint_D y\delta\,dV,\quad M_{xy}=\iiint_D z\delta\,dV$

Center of Mass: $\bar{x}=\dfrac{M_{yz}}{M}\quad \&\quad \bar{y}=\dfrac{M_{xz}}{M}\quad \&\quad \bar{z}=\dfrac{M_{xy}}{M}$

مثال: أوجد مركز الثقل للمجسم $z = 4 - x^2 - y^2$ ذي الكثافة الثابتة δ والمحدد من الأسفل بالقرص $R: x^2 + y^2 \le 4$ في المستوي $z = 0$.



الحل: بما أن الشكل متناظر، نلاحظ أن: $\bar{x} = \bar{y} = 0$، علينا حساب $\bar{z}$ لنحسب أولاً التكامل :

$$M_{xy} = \iiint_D z\delta \, dV = \delta \iiint_D z \, dz \, dx \, dy \Longrightarrow$$

$$M_{xy} = \delta \iint_R \int_0^{4-x^2-y^2} z dz \, dx \, dy = \delta \iint_R \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{4-x^2-y^2} dx \, dy \Longrightarrow$$

$$M_{xy} = \frac{\delta}{2} \iint_R (4 - x^2 - y^2)^2 dx \, dy$$

باستخدام الإحداثيات القطبية: $\Longrightarrow x = r\cos\theta \, , y = r\sin\theta \, , dxdy = rdrd\theta$.

$$M_{xy} = \frac{\delta}{2} \iint_R (4 - x^2 - y^2)^2 dx \, dy = \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2)^2 r dr \, d\theta =$$

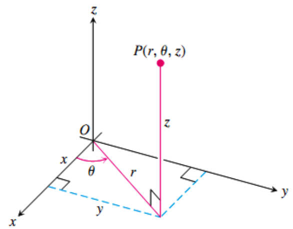
$$= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{6}(4 - r^2)^3\right]_0^2 d\theta = \frac{16\,\delta}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\,\pi\,\delta}{3}$$

والآن بنفس الطريقة نجد أن M تساوي:

$$M = \iiint_D \delta \, dV = \delta \iiint_D dz \, dx \, dy = \delta \iint_R \int_0^{4-x^2-y^2} dz \, dx \, dy = 8\,\pi\,\delta$$

ومنه: $\bar{z} = M_{xy}/M = 4/3$ ، أي أن مركز الثقل هو: $(0, 0, 4/3)$، وهو مركز التوازن لأن δ ثابتة.

التكامل الثلاثي في الإحداثيات الأسطوانية:



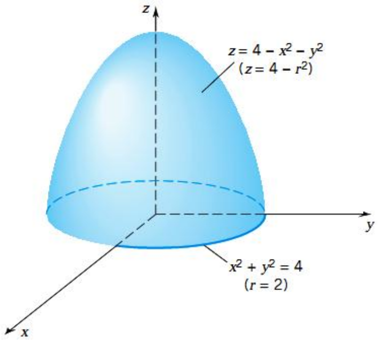
$$x = r\cos\theta \, , \quad y = r\sin\theta \, , \quad z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \, , \quad \tan\theta = \frac{y}{x} , \quad z = z$$

$$I = \iiint_D f dV = \iiint_{D^*} f \, dz \, r \, dr \, d\theta$$

$$I = \iiint_D f(r, \theta, z) dV = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=h_1(\theta)}^{r=h_2(\theta)} \int_{z=g_1(r,\theta)}^{z=g_2(r,\theta)} f(r, \theta, z) dz \, r \, dr \, d\theta$$

مثال: مستعيناً بالإحداثيات الأسطوانية أوجد قيمة التكامل:



$$\iiint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

حيث D محددة بما يلي:

$$D: -2 \le x \le 2, -\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}$$
$$0 \le z \le 4 - x^2 - y^2$$

الحل: باستخدام الإحداثيات الأسطوانية تصبح المنطقة:

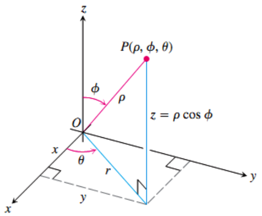
$$S: 0 \le r \le 2 \, , \quad 0 \le \theta \le 2\pi \, , \quad 0 \le z \le 4 - r^2$$

$$\iiint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz = \iiint_S r^2 \, r \, dr \, d\theta \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r^3 dz \, dr \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 [r^3 z]_0^{4-r^2} dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r^3 - r^5) dr \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[4r^4 - \frac{1}{6}r^6\right]_0^2 d\theta = \frac{16}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi}{3}$$

التكامل الثلاثي في الإحداثيات الكروية:



$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi \, , \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi \, , \quad z = \rho\cos\varphi$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \, , \tan\theta = \frac{y}{x} \, , \cos\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

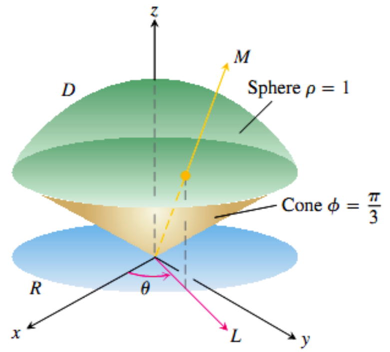
$$I = \iiint_D f dV = \iiint_{D^*} f(\rho, \varphi, \theta) \, \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$\iiint_D f(\rho, \varphi, \theta) dV = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{\varphi=h_1(\theta)}^{\varphi=h_2(\theta)} \int_{\rho=g_1(\varphi,\theta)}^{\rho=g_2(\varphi,\theta)} f(r, \theta, z) \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

مثال: أوجد حجم المجسم D (أيس كريم) المحدد من الأعلى بالكرة التي مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها 1 والمخروط الدوراني ذي الزاوية الرأسية التي قدرها $\varphi = \pi/3$.

الحل: إن قيمة حجم المجسم تعطى بالعلاقة:

$$\iiint_D \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \quad ; \quad f(\rho,\varphi,\theta) = 1$$



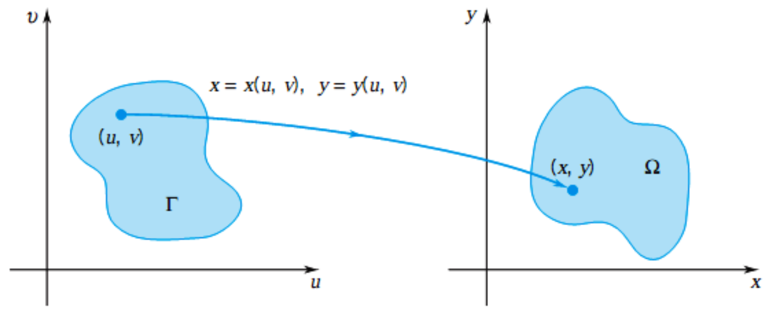
الآن نوجد حدود التكامل فيكون:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \Longrightarrow$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \Longrightarrow$$

$$V = \int_0^{2\pi}\left[\frac{-1}{3}\cos\varphi\right]_0^{\pi/3} d\theta = \left(\frac{1}{6}\right)(2\pi) = \frac{\pi}{3}$$

الجاكوبي وتغيير المتحولات في التكامل المتعدد:



لنفرض أن: $x = x(u,v), \; y = y(u,v)$، فإن الجاكوبي يعطى بالعلاقة:

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \;, \quad \text{Area of } \Omega = \iint_\Gamma |J| du dv$$

فلحساب التكامل الثنائي نجري التحويل: $x(u,v), \; y(u,v)$ فيكون:

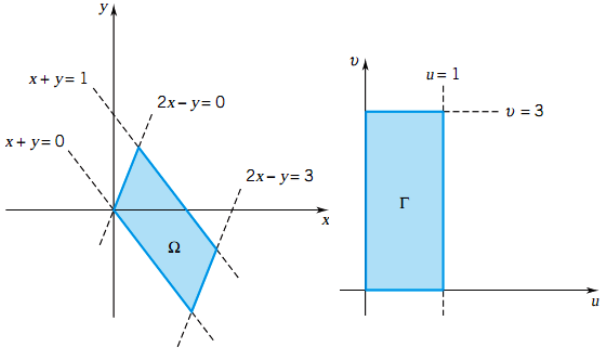
$$\iint_\Omega f(x,y) dx dy = \iint_\Gamma f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \, |J(u,v)| \, du \, dv$$

مثال: احسب قيمة التكامل: $\iint_\Omega (x+y)^2 dx dy$ على المنطقة Ω والتي هي متوازي الأضلاع:

$$x+y=0 \,, \quad x+y=1 \,, \quad 2x-y=0 \,, \quad 2x-y=3$$

الحل: نفرض أن: $u = x+y \,, \; v = 2x-y$، فيكون: $x = \frac{u+v}{3} \,, \; y = \frac{2u-v}{3}$، والجاكوبي:

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u+v}{3}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u+v}{3}\right) \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{2u-v}{3}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2u-v}{3}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$



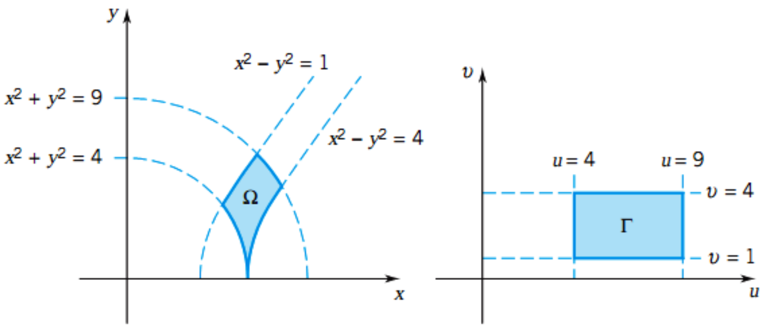
وتكون حدود التكامل: $0 \le v \le 3 \quad \& \quad 0 \le u \le 1$. ويصبح التكامل:

$$\iint_\Omega (x+y)^2 dx dy = \iint_\Gamma u^2 |J(u,v)| \, du \, dv = \frac{1}{3}\int_0^3\int_0^1 u^2 du dv = \frac{1}{3}$$

مثال آخر: احسب قيمة التكامل: $\iint_\Omega xy \, dx dy$ على المنطقة Ω والتي هي:

$$x^2+y^2=4 \,, \quad x^2+y^2=9 \,, \quad x^2-y^2=1 \,, \quad x^2-y^2=4$$

الحل: نفرض أن: $u = x^2+y^2 \,, \; v = x^2-y^2$، فيكون: $x = \sqrt{\frac{u+v}{2}} \,, \; y = \sqrt{\frac{u-v}{2}}$، وحدود التكامل: $1 \le v \le 4 \quad \& \quad 4 \le u \le 9$ والجاكوبي:



$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{u+v}{2}}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{u+v}{2}}\right)\\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{u-v}{2}}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{u-v}{2}}\right)\end{vmatrix}=-\frac{1}{4\sqrt{u^2-v^2}}$$

$$\iint_{\Omega} xy\,dxdy=\iint_{\Gamma}\left(\sqrt{\frac{u+v}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{u-v}{2}}\right)\frac{1}{4\sqrt{u^2-v^2}}\,du\,dv=\frac{1}{8}\iint_{\Gamma}du\,dv$$

$$=\frac{1}{8}(\text{Area of }\Gamma)=\frac{15}{8}$$